VAR A DENSITE.13. HEC.ESCP

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–13

Soit X une variable aléatoire à densité, de fonction de répartition F. Déterminer la fonction de répartition de X^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Appliquer à X suivant une loi uniforme sur $[-1, 1]$.

Eléments de correction : 13.

Notons F_n la fonction de répartition de X^n et F celle de X.

$\forall x \in \mathbb{R},\ F_n(x) = P(X^n \leq x)$.

- **Cas où n est pair.** Alors $X^n(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$.

$\forall x \leq 0,\ F_n(x) = 0$.

$$\begin{aligned} \forall x > 0,\ (X^n \leq x) &= (-x^{\frac{1}{n}} \leq X \leq x^{\frac{1}{n}}) \\ F_n(x) &= F(x^{\frac{1}{n}}) - F(-x^{\frac{1}{n}}) \end{aligned}$$

$$\boxed{F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ F(x^{\frac{1}{n}}) - F(-x^{\frac{1}{n}}) & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}}$$

- **Cas où n est impair.** Alors $X^n(\Omega) \subset \mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ (X^n \leq x) = (X \leq x^{\frac{1}{n}})$ car la fonction $t \longmapsto t^{\frac{1}{n}}$ est la réciproque de $t \longmapsto t^n$; elle est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ F_n(x) = F(x^{\frac{1}{n}})}$$

- **Application au cas où X suit la loi uniforme sur $[-1, 1]$.**

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -1 \\ \dfrac{x+1}{2} & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Etudions succinctement les fonctions $f_n\ :\ t \longmapsto t^n$ et $g_n\ :\ t \longmapsto t^{\frac{1}{n}}$

$\triangleleft$ **cas où n est pair et $t \geq 0$.**

t	0		1		$+\infty$
f_n	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

t	0		1		$+\infty$
g_n	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

$X^n(\Omega) = [0; 1]$

Soit $x \geq 0$; $F_n(x) = F(x^{\frac{1}{n}}) - F(-x^{\frac{1}{n}}) = F(g_n(x)) - F(-g_n(x))$.

Si $x \geq 1$, alors $g_n(x) \geq 1$ et donc $-g_n(x) \leq -1$: donc $F_n(x) = 1 - 0 = 1$.

Si $0 \leq x \leq 1$, alors $g_n(x) \in [0; 1]$ et $-g_n(x) \in [-1; 0]$ d'après l'étude faite précédemment ; donc $F_n(x) = \dfrac{x^{\frac{1}{n}} + 1}{2} - \dfrac{-x^{-\frac{1}{n}} + 1}{2} = x^{\frac{1}{n}}$.

$$\boxed{F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x^{\frac{1}{n}} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}}$$

$\triangleleft$ **cas où n est impair et $t \in \mathbb{R}$.**

t		-1		0		1	
f_n	$\nearrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$

t		-1		0		1	
g_n	$\nearrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$

$X^n(\Omega) = [-1;1]$ et $F_n(x) = F(g_n(x))$.
Si $x \leq -1$, alors $g_n(x) \leq -1$, donc $F_n(x) = 0$.
Si $-1 \leq x \leq 1$, alors $-1 \leq g_n(x) \leq 1$ d'après le tableau de variations de g_n, donc $F_n(x) = \dfrac{x^{\frac{1}{n}}+1}{2}$.

Si $x \geq 1$, alors $g_n(x) \geq 1$ et $F_n(x) = 1$.

$$\boxed{F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -1 \\ \dfrac{x^{\frac{1}{n}}+1}{2} & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}}$$