VAR A DENSITE.13. HEC.ESCP

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–13

Soit X une variable aléatoire à densité, de fonction de répartition F. Déterminer la fonction de répartition de X^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Appliquer à X suivant une loi uniforme sur $[-1, 1]$.

 © EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Eléments de correction : 13.

Notons F_n la fonction de répartition de X^n et F celle de X.

$\forall x \in \mathbb{R},\ F_n(x) = P(X^n \leq x)$.

- **Cas où n est pair.** Alors $X^n(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$.

$\forall x \leq 0,\ F_n(x) = 0$.

$$\begin{aligned} \forall x > 0,\ (X^n \leq x) &= (-x^{\frac{1}{n}} \leq X \leq x^{\frac{1}{n}}) \\ F_n(x) &= F(x^{\frac{1}{n}}) - F(-x^{\frac{1}{n}}) \end{aligned}$$

$$\boxed{F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ F(x^{\frac{1}{n}}) - F(-x^{\frac{1}{n}}) & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}}$$

- **Cas où n est impair.** Alors $X^n(\Omega) \subset \mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ (X^n \leq x) = (X \leq x^{\frac{1}{n}})$ car la fonction $t \longmapsto t^{\frac{1}{n}}$ est la réciproque de $t \longmapsto t^n$; elle est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ F_n(x) = F(x^{\frac{1}{n}})}$$

- **Application au cas où X suit la loi uniforme sur $[-1,1]$.**

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -1 \\ \dfrac{x+1}{2} & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Etudions succinctement les fonctions $f_n : t \longmapsto t^n$ et $g_n : t \longmapsto t^{\frac{1}{n}}$

◃ **cas où n est pair et $t \geq 0$.**

t	0		1		$+\infty$
f_n	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

t	0		1		$+\infty$
g_n	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

$X^n(\Omega) = [0;1]$

Soit $x \geq 0$; $F_n(x) = F(x^{\frac{1}{n}}) - F(-x^{\frac{1}{n}}) = F(g_n(x)) - F(-g_n(x))$.

Si $x \geq 1$, alors $g_n(x) \geq 1$ et donc $-g_n(x) \leq -1$: donc $F_n(x) = 1 - 0 = 1$.

Si $0 \leq x \leq 1$, alors $g_n(x) \in [0;1]$ et $-g_n(x) \in [-1;0]$ d'après l'étude faite précédemment ; donc $F_n(x) = \dfrac{x^{\frac{1}{n}}+1}{2} - \dfrac{-x^{-\frac{1}{n}}+1}{2} = x^{\frac{1}{n}}$.

$$\boxed{F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x^{\frac{1}{n}} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}}$$

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

◃ **cas où n est impair et $t \in \mathbb{R}$.**

t		-1		0		1	
f_n	$\nearrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$

t		-1		0		1	
g_n	$\nearrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$

$X^n(\Omega) = [-1;1]$ et $F_n(x) = F(g_n(x))$.
Si $x \leq -1$, alors $g_n(x) \leq -1$, donc $F_n(x) = 0$.
Si $-1 \leq x \leq 1$, alors $-1 \leq g_n(x) \leq 1$ d'après le tableau de variations de g_n, donc $F_n(x) = \dfrac{x^{\frac{1}{n}} + 1}{2}$.
Si $x \geq 1$, alors $g_n(x) \geq 1$ et $F_n(x) = 1$.

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -1 \\ \dfrac{x^{\frac{1}{n}} + 1}{2} & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021