VAR A DENSITE.14. HEC.ESCP

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–14

Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes, définies sur le même espace probabilisé, admettant toutes une même densité f, continue sur $\mathbb{R}$ et strictement positive. On note F leur fonction de répartition.

On pose $U_n = \min(X_1, \ldots, X_n)$ et $V_n = F(U_n)$.

Déterminer la fonction de répartition de U_n et celle de V_n. Que remarque-t-on ?

 © EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Eléments de correction : 14.

- Détermination de la fonction de répartition F_n de U_n

Notons F la fonction de répartition commune des X_k pour $1 \leq k \leq n$.

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R},\ F_n(x) &= P(U_n \leq x) \\
&= 1 - P(U_n > x) \\
&= 1 - P(X_1 > x \cap X_2 > x \cap \cdots \cap X_n > x) \\
&= 1 - \prod_{i=1}^{n} P(X_i > x) \quad \text{par indépendance des variables} \\
&= 1 - \Big(P(X_1 > x)\Big)^n \quad \text{les variables suivent la même loi}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ F_n(x) = 1 - (1 - F(x))^n}$$

- Détermination de la fonction de répartition G_n de $V_n = F(U_n)$

On sait, d'après le cours, que F est continue sur $\mathbb{R}$ et strictement croissante puisque $f > 0$. Il en résulte que F réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0;1[$.

Donc, $V_n(\Omega) =]0;1[$ et par conséquent,

$\forall x \leq 0,\ G_n(x) = 0$ et $\forall x \geq 1,\ G_n(x) = 1$.

$$\begin{aligned}
\forall x \in]0;1[,\ G_n(x) &= P(F(U_n) \leq x) \\
&= P(F^{-1}(F(U_n)) \leq F^{-1}(x)) \quad \text{car } F^{-1} \text{ est strictement croissante} \\
&= P(U_n \leq F^{-1}(x)) \\
&= F_n(F^{-1}(x)) \\
&= 1 - (1 - F(F^{-1}(x)))^n \quad \text{d'après la question précédente} \\
&\forall x \in]0;1[,\ G_n(x) = 1 - (1 - x)^n
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement } G_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - (1-x)^n & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}}$$

On remarque que la loi de V_n est indépendante de celle des X_k.

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021