INTEGRALES GENERALISEES 1. HEC ESCP

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–1

Quelle est la nature de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+1} - \sqrt{x^2+1} \right) dx$

 © EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Indications - intégrales généralisées1.

On pourra faire un développement limité.

 © EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Eléments de correction : intégrales généralisées.1

Posons $f(x) = \sqrt[3]{x^3+1} - \sqrt{x^2+1}$. La fonction f est continue sur $[0,+\infty[$; en effet $x \longmapsto x^3+1$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, la fonction racine cubique est continue sur $\mathbb{R}_+$, donc par composition, $x \longmapsto \sqrt[3]{x^3+1}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. Même démonstration pour $x \longmapsto \sqrt{x^2+1}$.

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx$ est impropre en $+\infty$ et elle est de même nature que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)dx$

Pour $x \geq 1$,

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{x^3+1} &= \sqrt[3]{x^3(1+\frac{1}{x^3})}\\ &= \sqrt[3]{x^3} \times \sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}}\\ &= x\left(1+\frac{1}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}}\end{aligned}$$

Faisons un développement limité de $\left(1+\frac{1}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}}$ à l'ordre 3 au voisinage de $+\infty$ par rapport à la variable $\frac{1}{x}$.

$\left(1+\frac{1}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}} = 1+\frac{1}{3x^3}+o(\frac{1}{x^3})$.

Donc $x\left(1+\frac{1}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}} = x+\frac{1}{3x^2}+o(\frac{1}{x^2})$

NB Pour les étudiants qui ne sont pas familiarisés avec la notation de Landau, $o(\frac{1}{x^3}) = \frac{1}{x^3}\times\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty}\varepsilon(x)=0$; donc $x\times o(\frac{1}{x^3}) = x\times\frac{1}{x^3}\times\varepsilon(x) = \frac{1}{x^2}\times\varepsilon(x) = o(\frac{1}{x^2})$.

De même

Pour $x \geq 1$,

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+1} &= \sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}\\ &= \sqrt{x^2} \times \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\\ &= x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

Faisons un développement limité de $\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ à l'ordre 2 au voisinage de $+\infty$ par rapport à la variable $\frac{1}{x}$.

$\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}} = 1+\frac{1}{2x^2}+o(\frac{1}{x^2})$.

Donc $x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}} = x+\frac{1}{2x}+o(\frac{1}{x})$

Il en résulte que, pour $x \geq 1$, $f(x) = x+\frac{1}{3x^2}+o(\frac{1}{x^2})-(x+\frac{1}{2x}+o(\frac{1}{x})) = -\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x^2}+o(\frac{1}{x})$ car

$$\begin{aligned}o(\frac{1}{x^2})+o(\frac{1}{x}) &= \frac{1}{x^2}\varepsilon_1(x)+\frac{1}{x}\varepsilon_2(x)\\ &= \frac{1}{x}\underbrace{\left(\frac{1}{x}\varepsilon_1(x)+\varepsilon_2(x)\right)}_{=\alpha(x)}\end{aligned}$$

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Et puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha(x)=0$, on en déduit que $\frac{1}{x}\alpha(x)=o(\frac{1}{x})$.

De plus $\frac{1}{x^2}=o(\frac{1}{x})$, donc finalement $f(x)=-\frac{1}{2x}+o(\frac{1}{x})$.

Conclusion : $f(x)\underset{(+\infty)}{\sim}(-\frac{1}{2x})$

Les deux fonctions f et $x\longmapsto-\frac{1}{2x}$ sont continues, de signe constant (négatives) au voisinage de $+\infty$, les intégrales $\int_1^{+\infty}f(x)dx$ et $\int_1^{+\infty}-\frac{dx}{2x}$ sont de même nature.

L'intégrale $\int_1^{+\infty}-\frac{dx}{2x}$ est divergente car $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}$ diverge d'après le critère de Riemann ($\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha>1$) et $-\frac{1}{2}\neq0$.

Donc l'intégrale $\int_1^{+\infty}f(x)dx$ diverge et par conséquent

l'intégrale $\int_0^{+\infty}f(x)dx$ est divergente

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021