INTERALES GENERALISEES 2. HEC ESCP

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–2

f, g, h sont 3 applicatons continues sur $\mathbb{R}_+$. On suppose que :

$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ et les intégrales $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ et $\int_0^{+\infty} h(x)dx$ sont convergentes.

Que peut-on dire de l'intégrale $\int_0^{+\infty} g(x)dx$?

Intégrales généralisées.2

Réponse : elle converge.

Eléments de correction : intégrales généralisées.2

Par hypothèse on peut écrire : $\forall x \geq 0,\ 0 \leq g(x) - f(x) \leq h(x) - f(x)$.
$\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} h(x)dx$ convergent par hypothèse, donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} (h(x) - f(x))dx$ converge aussi.
Les fonctions $g - f$ et $h - f$ sont continues sur $\mathbb{R}_+$, positives ; d'après le théorème de comparaison des fonctions continues positives, on conclut que $\displaystyle\int_0^{+\infty} (g(x) - f(x))dx$ converge.
Or $g = (g - f) + f$. D'après les opérations sur les intégrales convergentes,

($\displaystyle\int_0^{+\infty} (g(x) - f(x))dx$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx$ convergent) entraine $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(x)dx$ converge.