INTERALES GENERALISEES 2. HEC ESCP

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–2

f, g, h sont 3 applicatons continues sur $\mathbb{R}_+$. On suppose que :

$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ et les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} h(x)dx$ sont convergentes.

Que peut-on dire de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(x)dx$?

 © EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Intégrales généralisées.2

Réponse : elle converge.

 © EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Eléments de correction : intégrales généralisées.2

Par hypothèse on peut écrire : $\forall x \geq 0,\ 0 \leq g(x) - f(x) \leq h(x) - f(x)$.
$\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} h(x)dx$ convergent par hypothèse, donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} (h(x) - f(x))dx$ converge aussi.
Les fonctions $g - f$ et $h - f$ sont continues sur $\mathbb{R}_+$, positives ; d'après le théorème de comparaison des fonctions continues positives, on conclut que $\displaystyle\int_0^{+\infty} (g(x) - f(x))dx$ converge.
Or $g = (g - f) + f$. D'après les opérations sur les intégrales convergentes,

$$\left(\int_0^{+\infty} (g(x) - f(x))dx \textbf{ et } \int_0^{+\infty} f(x)dx \textbf{ convergent}\right) \textbf{ entraine } \int_0^{+\infty} g(x)dx \textbf{ converge.}$$

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021