



INTEGRALES GENERALISEES 3. HEC ESCP

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE-3

Déterminer, si elles existent,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n} dt, \text{ puis } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{t^n}{1-t^n} dt.$$

Indications - Intégrales généralisées.3

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n} dt = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{t^n}{1-t^n} dt \text{ n'existe pas car } \int_0^1 \frac{t^n}{1-t^n} dt \text{ diverge.}$$

Eléments de correction : intégrales généralisées.3

1) Posons $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n} dt$. Cette intégrale existe car $t \mapsto \frac{t^n}{1+t^n}$ est continue sur $[0, 1]$.

Pour tout $t \in [0, 1]$, on a : $0 \leq t^n \leq 1$ donc $1 \leq 1+t^n \leq 2$; il s'ensuit que $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+t^n} \leq 1$; puis on multiplie par t^n qui est ≥ 0 et on obtient l'encadrement :

$$\forall t \in [0, 1], \frac{t^n}{2} \leq \frac{t^n}{1+t^n} \leq t^n.$$

Intégrons cet encadrement entre 0 et 1 ($0 < 1$), il vient

$$\int_0^1 \frac{t^n}{2} dt \leq \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n} dt \leq \int_0^1 t^n dt, \text{ soit (le calcul n'offre aucune difficulté),}$$

$$\frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

Par le théorème d'encadrement $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$

2) Posons $g_n(t) = \frac{t^n}{1-t^n}$. La fonction g_n est continue sur $[0, 1[$; l'intégrale $\int_0^1 g_n(t) dt$ est impropre en 1.

Or, pour tout $t \in [0, 1[$, $\sum_{k=0}^{n-1} t^k = \frac{1-t^n}{1-t}$.

Puis, pour $n \geq 1$, $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{1-t^n}{1-t} = \lim_{t \rightarrow 1} \sum_{k=0}^{n-1} t^k = n \neq 0$, donc $\frac{1-t^n}{1-t} \underset{(1)}{\sim} n$ ou encore $\frac{1}{1-t^n} \underset{(1)}{\sim} \frac{1}{n(1-t)}$.

Au voisinage de 1, t^n équivaut à 1.

Donc $\frac{t^n}{1-t^n} \underset{(1)}{\sim} \frac{1}{1-t^n} \underset{(1)}{\sim} \frac{1}{n(1-t)}$, soit $\frac{t^n}{1-t^n} \underset{(1)}{\sim} \frac{1}{n(1-t)}$,

Plaçons nous sur l'intervalle $[\frac{1}{2}, 1[$;

Les deux fonctions sont continues, positives sur $[\frac{1}{2}, 1[$, les intégrales $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{t^n}{1-t^n} dt$ et

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{n(1-t)} dt$$
 sont de même nature.

L'intégrale $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{(1-t)} dt$ est divergente selon le critère de Riemann (on peut aussi primitiver $t \mapsto \frac{1}{1-t}$; on trouvera $t \mapsto -\ln(1-t)$ dont la limite quand $t \rightarrow 1$ n'est pas réelle).

Puisque $\frac{1}{n} \neq 0$, l'intégrale $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{n(1-t)} dt$ est divergente et par équivalence des fonctions continues positives, l'intégrale $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{t^n}{1-t^n} dt$ est divergente.

L'intégrale $J_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1-t^n} dt$ est divergente, cela veut dire qu'elle n'existe pas dans l'ensemble des nombres réels :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n$ **n'existe pas**