



**INTEGRALES IMPROPRES.4. HEC.ESCP**

**ENONCE DE L'EXERCICE**

**ENONCE-4**

Convergence et calcul de l'intégrale  $\int_0^1 \left( \frac{1}{x} + \frac{\ln(1-x)}{x^2} \right) dx$

**Éléments de correction : 4.**

• **Convergence de l'intégrale**

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{\ln(1-x)}{x^2} \text{ pour } x \in ]0; 1[.$$

La fonction  $f$  est continue sur  $]0; 1[$ . En effet,

la fonction  $x \mapsto 1-x$  est continue sur  $]0; 1[$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}_+^*$ . La fonction  $\ln$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ , donc par composition, la fonction  $x \mapsto \ln(1-x)$  est continue sur  $]0; 1[$

La fonction  $x \mapsto \frac{1}{x^2}$  est continue sur  $]0; 1[$ , donc  $x \mapsto \frac{\ln(1-x)}{x^2}$  est continue sur  $]0; 1[$ .

Il est alors clair que  $f$  est continue sur  $]0; 1[$  puisque  $x \mapsto \frac{1}{x}$  l'est.

**L'intégrale  $I = \int_0^1 f(x)dx$  est impropre en 0 et en 1.**

• **Etude en 0.**

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{\ln(1-x)}{x^2} &= \frac{1}{x} + \frac{-x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2} \\ &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2} + o(1) = -\frac{1}{2} + o(1) \end{aligned}$$

Rappelons peut-être que  $o(x^2) = x^2\varepsilon(x)$  avec  $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$ , donc

$$\frac{o(x^2)}{x^2} = \varepsilon(x) = x^0\varepsilon(x) = o(1). \text{ En tout état de cause, } \lim_{x \rightarrow 0} o(1) = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\frac{1}{2} : f \text{ est prolongeable par continuité en } 0,$$

**l'intégrale  $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx$  est faussement impropre, donc convergente.**

• **Etude en 1.**

Le problème vient de  $\frac{\ln(1-x)}{x^2}$  puisque l'intégrale  $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{x}$  existe (intégrale d'une fonction continue sur un intervalle fermé).

$$\frac{\ln(1-x)}{x^2} \underset{(1)}{\sim} \ln(1-x). \text{ L'intégrale } \int_{\frac{1}{2}}^1 \ln(1-x)dx \text{ converge : en effet,}$$

effectuons le changement de variable  $u = 1-x$ , qui est  $C^1$  bijectif sur  $[\frac{1}{2}, 1]$ , on obtient

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \ln(1-x)dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \ln u du. \text{ Cette dernière intégrale est convergente car la fonction } \ln \text{ est une fonction de référence en } 0 \text{ dont l'intégrale converge.}$$

L'intégrale  $\int_{\frac{1}{2}}^1 \ln(1-x)dx$  converge, donc par équivalence des fonctions continues de

signe constant l'intégrale  $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln(1-x)}{x^2} dx$  converge.

**Conclusion : l'intégrale  $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx$  est convergente.**

Les deux intégrales  $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx$  et  $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx$  convergent donc

**l'intégrale  $\int_0^1 f(x)dx$  est convergente**

• **Calcul de l'intégrale**

Soit  $(a, b) \in ]0; 1]^2$  tel que  $a < b$ .

$$\begin{aligned} I(a, b) &= \int_a^b \left( \frac{1}{x} + \frac{\ln(1-x)}{x^2} \right) dx \\ &= \int_a^b \frac{1}{x} dx + \int_a^b \frac{\ln(1-x)}{x^2} dx \\ &= \ln|b| - \ln|a| + \underbrace{\int_a^b \frac{\ln(1-x)}{x^2} dx}_{=J(a,b)} \end{aligned}$$

Dans l'intégrale  $J(a, b)$ , faisons une intégration par parties.

$$\begin{aligned} u(x) = \ln(1-x) &\implies u'(x) = -\frac{1}{1-x} \\ v'(x) = \frac{1}{x^2} &\iff v(x) = -\frac{1}{x} \end{aligned}$$

Les fonctions  $u$  et  $v$  sont de classe  $C^1$  sur  $[a, b]$ , l'intégration par parties est légitime.

$$\begin{aligned} J(a, b) &= \left[ -\frac{\ln(1-x)}{x} \right]_a^b - \int_a^b \frac{dx}{x(1-x)} \\ &= -\frac{\ln(1-b)}{b} + \frac{\ln(1-a)}{a} - \underbrace{\int_a^b \frac{dx}{x(1-x)}}_{=K(a,b)} \end{aligned}$$

◁ **Calcul de  $K(a, b)$ .**

Décomposons  $\frac{1}{x(1-x)}$  en une somme ; la technique est maintenant classique car maintes fois utilisée. On cherche  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 / \frac{1}{x(1-x)} = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{1-x}$ . On réduit au même dénominateur et on obtient  $\frac{1}{x(1-x)} = \frac{(\beta - \alpha)x + \alpha}{x(1-x)}$ .

Les réels  $\alpha$  et  $\beta$  sont solutions du système :  $\begin{cases} \beta - \alpha = 0 \\ \alpha = 1 \end{cases}$

Ce qui donne immédiatement  $\alpha = \beta = 1$ , donc

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{dx}{x(1-x)} &= \int_a^b \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} \right) dx \\ &= \int_a^b \frac{1}{x} dx + \int_a^b \frac{1}{1-x} dx \\ &= [\ln|x|]_a^b - [\ln|1-x|]_a^b \\ K(a, b) &= \ln b - \ln a - \ln(1-b) + \ln(1-a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J(a, b) &= -\frac{\ln(1-b)}{b} + \frac{\ln(1-a)}{a} - (\ln b - \ln a - \ln(1-b) + \ln(1-a)) \\ &= -\frac{\ln(1-b)}{b} + \frac{\ln(1-a)}{a} - \ln b + \ln a + \ln(1-b) - \ln(1-a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I(a, b) &= \ln b - \ln a + J(a, b) \\ &= \ln b - \ln a - \frac{\ln(1-b)}{b} + \frac{\ln(1-a)}{a} - \ln b + \ln a + \ln(1-b) - \ln(1-a) \\ &= -\frac{\ln(1-b)}{b} + \frac{\ln(1-a)}{a} + \ln(1-b) - \ln(1-a) \end{aligned}$$

Il est clair que  $\int_0^1 \left(\frac{1}{x} + \frac{\ln(1-x)}{x^2}\right) dx = \lim_{\substack{a \rightarrow 0^+ \\ b \rightarrow 1^-}} J(a, b)$ .

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1-a)}{a} - \ln(1-a) = -1 + 0 = -1 \text{ car } \ln(1-a) \underset{(0)}{\sim} -a.$$

$$\begin{aligned} \lim_{b \rightarrow 1^-} \left( -\frac{\ln(1-b)}{b} + \ln(1-b) \right) &= \lim_{b \rightarrow 1^-} \frac{(b-1)\ln(1-b)}{b} \\ &= \lim_{b \rightarrow 1^-} -\frac{(1-b)\ln(1-b)}{b} \\ &= 0 \text{ car par croissances comparées} \\ &\quad \lim_{b \rightarrow 1^-} (1-b)\ln(1-b) = 0 \end{aligned}$$

Conclusion :  $\lim_{\substack{a \rightarrow 0^+ \\ b \rightarrow 1^-}} I(a, b) = -1 + 0 = -1$

$$\lim_{\substack{a \rightarrow 0^+ \\ b \rightarrow 1^-}} I(a, b) = -1 \text{ veut dire } \int_0^1 \left(\frac{1}{x} + \frac{\ln(1-x)}{x^2}\right) dx = -1$$