



PROBABILITES DISCRETES

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–28

Soit X_1, \dots, X_n , n variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé (Ω, \mathcal{T}, P) , mutuellement indépendantes. On suppose en outre que, pour tout indice $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ la variable X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre p_i / $p_i \in]0, 1[$. On pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$

Soit $a \in \mathbb{R}_+$. Déterminer les paramètres p_i pour que la variance $V(S_n)$ soit maximale si l'on impose la contrainte : l'espérance $E(S_n)$ de S_n est égale à a .

CORRIGE DE L'EXERCICE NUMERO 28

- Par linéarité de l'espérance, $E(S_n) = \sum_{i=1}^n p_i$ et par indépendance des variables X_i ,

$$V(S_n) = \sum_{i=1}^n V(X_i) = \sum_{i=1}^n p_i(1 - p_i).$$

Nous allons donner trois méthodes pour arriver au résultat.

$$V(S_n) = \sum_{i=1}^n (p_i - p_i^2) = \sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^n p_i^2 = a - \sum_{i=1}^n p_i^2$$

$V(S_n)$ sera maximale si et seulement si $\sum_{i=1}^n p_i^2$ est minimale.

Première méthode : récurrence sur n

- $n = 2$. On a le système $\begin{cases} p_1 + p_2 = a \\ p_1^2 + p_2^2 = V(S_2) \end{cases}$

$$p_1^2 + p_2^2 = p_1^2 + (a - p_1)^2 = 2p_1^2 - 2ap_1 + a^2.$$

Etudions f définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = 2x^2 - 2ax + a^2$. $\forall x \in [0; 1]$, $f'(x) = 4x - 2a = 2(2x - a)$.
On a sans problème le tableau de variations :

x	0	$\frac{a}{2}$	1
$f'(x)$	-	0	+
f	\searrow		\nearrow

La fonction f est minimale au point $\frac{a}{2}$. Donc $p_1^2 + p_2^2$ est minimale pour $p_1 = \frac{a}{2}$; ce qui donne $p_2 = p_1 = \frac{a}{2}$.

- Hérédité : supposons que, lorsqu'il existe $b \geq 0$ / $\sum_{i=1}^n p_i = b$, la somme $\sum_{i=1}^n p_i^2$ est minimale pour $p_1 = \dots = p_n = \frac{b}{n}$.

Pour $n + 1$. Soit $a \geq 0$.

On a l'hypothèse $\sum_{i=1}^{n+1} p_i = a$ ce qui équivaut à $\sum_{i=1}^n p_i = a - p_{n+1} = b \geq 0$.

$\sum_{i=1}^{n+1} p_i^2 = \sum_{i=1}^n p_i^2 + p_{n+1}^2$. Le nombre p_{n+1} ne dépend pas des p_i / $1 \leq i \leq n$, on peut le considérer comme une constante par rapport à ces nombres.

$\sum_{i=1}^n p_i^2 + p_{n+1}^2$ sera minimale lorsque $\sum_{i=1}^n p_i^2$ le sera. D'après l'hypothèse de récurrence, cela se fera pour $p_1 = \dots = p_{n-1} = \frac{b}{n} = \frac{a - p_{n+1}}{n}$.

Ce minimum vaudra

$$\begin{aligned} n\left(\frac{a-p_{n+1}}{n}\right)^2 + p_{n+1}^2 &= \frac{1}{n}\left((n+1)p_{n+1}^2 - 2ap_{n+1} + a^2\right) \\ &= \frac{n+1}{n}\left(p_{n+1}^2 - 2\frac{a}{n+1}p_{n+1} + \frac{a^2}{n+1}\right) \\ &= \frac{n+1}{n}\left(\left(p_{n+1} - \frac{a}{n+1}\right)^2 - \frac{4a^2}{(n+1)^2} + \frac{a^2}{n+1}\right) \end{aligned}$$

Ce minimum sera lui-même minimum quand $p_{n+1} = \frac{a}{n+1}$. Il en résultera que

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, p_i = \frac{a - \frac{a}{n+1}}{n} = \frac{a}{n+1}.$$

La proposition est héréditaire et par principe du raisonnement par récurrence elle est satisfaite pour tout entier $n \geq 2$.

Deuxième méthode : directement

On a constaté que pour $n = 2$, $\sum_{i=1}^2 p_i^2$ était minimale pour $p_1 = p_2 = \frac{a}{2}$.

Montrons directement que pour $\sum_{i=1}^n p_i = a$, la somme $\sum_{i=1}^n p_i^2$ est maximale pour

$$p_1 = p_2 = \dots = p_n = \frac{a}{n}.$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n p_i^2 &= \sum_{i=1}^n \left(p_i - \frac{a}{n} + \frac{a}{n}\right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \left(p_i - \frac{a}{n}\right)^2 + \frac{2a}{n} \sum_{i=1}^n \left(p_i - \frac{a}{n}\right) + \sum_{i=1}^n \left(\frac{a}{n}\right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \left(p_i - \frac{a}{n}\right)^2 + \frac{2a}{n} \left(\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^n \frac{a}{n}\right) + \frac{a^2}{n} \\ &= \sum_{i=1}^n \left(p_i - \frac{a}{n}\right)^2 + \frac{2a}{n} (a - a) + \frac{a^2}{n} \\ &= \sum_{i=1}^n \left(p_i - \frac{a}{n}\right)^2 + \frac{a^2}{n} \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^n p_i^2 \geq \frac{a^2}{n}$$

Donc $\sum_{i=1}^n p_i^2$ sera minimale lorsque $\sum_{i=1}^n \left(p_i - \frac{a}{n}\right)^2$ sera nulle, ce qui équivaut à $p_i - \frac{a}{n} = 0$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Troisième méthode : avec une fonction de n-1 variables

$$\sum_{i=1}^n p_i^2 = \sum_{i=1}^{n-1} p_i^2 + p_n^2 = \sum_{i=1}^{n-1} p_i^2 + \left(a - \sum_{i=1}^{n-1} p_i\right)^2.$$

$$\text{Posons } f(p_1, \dots, p_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n-1} p_i^2 + \left(a - \sum_{i=1}^{n-1} p_i\right)^2.$$

C'est une fonction polynomiale des variables p_1, \dots, p_{n-1} , elle est donc de classe C^2 sur \mathbb{R}^{n-1}

- Recherche des points critiques.

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(p_1, \dots, p_{n-1}) = 2p_j - 2(a - \sum_{i=1}^{n-1} p_i)$$

Posons $s = \sum_{i=1}^{n-1} p_i$; alors $\frac{\partial f}{\partial x_j}(p_1, \dots, p_{n-1}) = 2p_j - 2(a - s)$ et

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(p_1, \dots, p_{n-1}) = 0 \iff p_j - (a - s) = 0, \text{ c'est-à-dire } p_j = a - s \text{ pour tout } j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket.$$

Sommons ces égalités pour $1 \leq j \leq n-1$, il vient $s = (n-1)a - (n-1)s$, donc $s = \frac{n-1}{n}a$.

De là on déduit : $p_j = a - s = \frac{a}{n}$. puis $p_n = \frac{a}{n}$ puisque $p_n = a - \sum_{i=1}^{n-1} p_i = a - s$.

S'il y a un point critique, il est unique et vaut $(\frac{a}{n}, \dots, \frac{a}{n})$

On vérifie facilement que ce point est effectivement critique car, pour tout $j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, on a :

$$\frac{a}{n} - (a - (n-1)\frac{a}{n}) = n\frac{a}{n} - a = 0.$$

- Recherche d'un extremum.

Pour tout $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, posons $p_i = \frac{a}{n} + h_i$ et $\sigma = \sum_{i=1}^{n-1} h_i$.

$$\begin{aligned} f(p_1, \dots, p_{n-1}) &= \sum_{i=1}^{n-1} (\frac{a}{n} + h_i)^2 + (a - \sum_{i=1}^{n-1} (\frac{a}{n} + h_i))^2 \\ &= \frac{n-1}{n^2}a^2 + \frac{2a}{n}\sigma + \sum_{i=1}^{n-1} h_i^2 + (\frac{a}{n} - \sigma)^2 \\ &= \frac{n-1}{n^2}a^2 + \frac{2a}{n}\sigma + \sum_{i=1}^{n-1} h_i^2 + \frac{a^2}{n^2} - \frac{2a}{n}\sigma + \sigma^2 \\ &= \frac{a^2}{n} + \sum_{i=1}^{n-1} h_i^2 + \sigma^2 \end{aligned}$$

Remarquons que $f(p_1, \dots, p_{n-1}) = \frac{a^2}{n^2}$ lorsque l'on est au point critique ; l'égalité précédente s'écrit :

$$f(\frac{a}{n} + h_1, \dots, \frac{a}{n} + h_{n-1}) = f(\frac{a}{n}, \dots, \frac{a}{n}) + \sum_{i=1}^{n-1} h_i^2 + \sigma^2,$$

donc

$$(\frac{a}{n} + h_1, \dots, \frac{a}{n} + h_{n-1}) \geq (\frac{a}{n}, \dots, \frac{a}{n})$$

La fonction f présente un minimum absolu au point $(\frac{a}{n}, \dots, \frac{a}{n})$