



## PROBABILITES DISCRETES

### ENONCE DE L'EXERCICE

#### ENONCE–29

Soit  $n$  un nombre entier supérieur ou égal à 1. On a invité  $n$  personnes à une conférence mais certains invités ne pourront pas venir ; on appelle "auditoire" l'ensemble des personnes qui viennent. On suppose que tous les auditoires comportant le même nombre de personnes sont équiprobables. Pour tout  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ , on note  $p_k$  la probabilité de chacun des auditoires comportant  $k$  personnes. On suppose aussi que, pour tout  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ , un auditoire de  $k$  personnes est  $k$  fois plus probable qu'un auditoire d'une personne, c'est-à-dire que  $p_k = kp_1$ .

1) Combien y a-t-il d'auditoires différents possibles ? Combien comportent  $k$  personnes ?

2) Montrer que  $p_1 = \frac{1}{n2^{n-1}}$ . Déterminer la loi du nombre  $X$ , aléatoire, de personnes qui viennent.

3) Quelle est la probabilité qu'un invité donné soit bien présent ?

4) Montrer que, avec cette modélisation, les événements "l'invité  $a$  est présent" et "l'invité  $b$  est présent" ne sont pas indépendants.

5) Les invités qui viendront ont prévenu le conférencier qui a réservé une salle comportant exactement le bon nombre de sièges. Une personne qui n'était pas invitée décide de venir aussi ; elle a autant de chance de trouver un siège que les personnes invitées.

Déterminer la probabilité  $q_n$  que cette personne reste debout et déterminer un équivalent simple de  $q_n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

## CORRIGE DE L'EXERCICE NUMERO 29

1) \_\_\_\_\_

Il y a autant d'auditoires possibles que de parties de l'ensemble des  $n$  personnes invitées, c'est-à-dire  $2^n$ .

Le nombre d'auditoires comportant  $k$  personnes vaut  $\binom{n}{k}$ .

2) \_\_\_\_\_

•  $X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$ , donc  $\sum_{k=0}^n P(X = k) = 1$ . D'après l'énoncé  $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $p_k = kp_1$  ; or  $p_k$  est la probabilité commune de tous les auditoires de  $k$  personnes, donc  $P(X = k) = \binom{n}{k} p_k$ .

On obtient donc  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} kp_1 = 1$ . Ce qui équivaut à  $p_1 \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = 1$ . La somme est connue et vaut  $n2^{n-1}$ .

$$p_1 = \frac{1}{n2^{n-1}}$$

**Remarque :** pour les étudiants qui ne connaîtraient " plus " cette somme, il suffit d'envisager une variable  $T$  qui suit la loi binomiale  $\mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$  ; pour tout

$k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $P(T = k) = \binom{n}{k} \frac{1}{2^n}$  et  $E(T) = \frac{n}{2}$ . Or  $E(T) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^n} k \binom{n}{k}$ .

L'égalité  $\frac{n}{2} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^n} k \binom{n}{k}$  donne le résultat.

•  $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $P(X = k) = k \binom{n}{k} p_k = \frac{k}{n2^{n-1}} \binom{n}{k}$ .

**Remarque :** en fait  $X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$  puisque  $P(X = 0) = 0$ . Pour  $k \neq 0$ ,  $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$  et on peut donc dire :

$$X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket \text{ et } \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(X = k) = \frac{1}{2^{n-1}} \binom{n-1}{k-1}$$

3) \_\_\_\_\_

Soit  $a$  une personne donnée. L'événement  $A$  " la personne  $a$  est présente " est l'événement " il a un auditoire dans lequel figure  $a$  ".

Si nous notons  $k \geq 1$  le cardinal d'un auditoire qui contient  $a$ , le nombre d'auditoires de  $k$  personnes qui contiennent  $a$  est  $\binom{n-1}{k-1}$  (nombre façons de choisir  $k-1$  personnes parmi les autres que  $a$  et d'ajouter  $a$ ).

Ce nombre est le cardinal de l'événement  $A_k$  : " la personne  $a$  est dans un auditoire de  $k$  personnes,  $1 \leq k \leq n$  ". Chaque auditoire de cardinal  $k$  est de probabilité  $p_k$ , donc  $P(A_k) = \binom{n-1}{k-1} p_k$ .

Il est clair que  $A = \bigcup_{k=1}^n A_k$ , événements deux à deux incompatibles, donc

$$\begin{aligned}
 P(A) &= \sum_{k=1}^n P(A_k) \\
 &= \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} p_k \\
 &= p_1 \sum_{k=1}^n k \binom{n-1}{k-1} \quad \text{on pose } j = k-1 \\
 &= p_1 \sum_{j=0}^{n-1} (j+1) \binom{n-1}{j} \\
 &= p_1 \left( \sum_{j=0}^{n-1} j \binom{n-1}{j} + \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} \right) \\
 &= p_1 \left( (n-1)2^{n-2} + 2^{n-1} \right) \\
 P(A) &= \frac{2^{n-2}(n+1)}{n2^{n-1}} = \frac{n+1}{2n}.
 \end{aligned}$$

4)

Soit  $a$  et  $b$  deux personnes différentes.

Notons à nouveau  $A$  : " l'invité  $a$  est présent " et  $B$  : " l'invité  $b$  est présent ".

Par la même démarche que dans la question précédente

$$\begin{aligned}
 P(A \cap B) &= \sum_{k=2}^n \binom{n-2}{k-2} p_k \\
 &= p_1 \sum_{k=2}^n k \binom{n-2}{k-2} \quad \text{on pose } j = k-2 \\
 &= p_1 \sum_{j=0}^{n-2} (j+2) \binom{n-2}{j} \\
 &= p_1 \left( (n-2)2^{n-3} + 2 \cdot 2^{n-2} \right) \\
 &= p_1 (n+2)2^{n-3}
 \end{aligned}$$

$$P(A \cap B) = \frac{n+2}{4n}$$

$A$  et  $B$  sont indépendants si et seulement si  $P(A)P(B) = P(A \cap B)$ , donc si et seulement si  $\left(\frac{n+1}{2n}\right)^2 = \frac{n+2}{4n}$ , soit  $(n+1)^2 = n(n+2)$ , ce qui est impossible.

**Les événements " l'invité  $a$  est présent " et " l'invité  $b$  est présent " ne sont pas indépendants.**

5)

Soit  $c$  la personne non invitée qui décide de venir et pour  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , notons  $S_k$  l'événement " la salle contient  $k$  places exactement " ce qui veut dire que  $k$  personnes exactement ont signé qu'elles venaient. Notons  $C$  l'événement : " la personne  $c$  reste debout ".

La famille  $(S_k)_{1 \leq k \leq n}$  est un système complet d'événements, donc, par la formule des probabilités totales,  $P(C) = \sum_{k=1}^n P(S_k)P_{S_k}(C)$

$P(S_k) = p_1 k \binom{n}{k}$  car l'événement  $S_k$  est " l'auditoire comporte  $k$  " personnes et  $P_{S_k}(C) = \frac{1}{k+1}$  car c'est comme s'il y avait  $k+1$  places dont une " mauvaise ".

$$P(C) = p_1 \sum_{k=1}^n \frac{k}{k+1} \binom{n}{k}$$

$$\begin{aligned} \frac{k}{k+1} \binom{n}{k} &= \frac{k \times n!}{(k+1)!(n-k)!} \\ &= \frac{k \times n!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!} \\ &= \frac{1}{n+1} \frac{k \times (n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!} = \frac{k}{n+1} \binom{n+1}{k+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{k}{k+1} \binom{n}{k} &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n k \binom{n+1}{k+1} \quad \text{on pose } j = k+1 \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{j=2}^{n+1} (j-1) \binom{n+1}{j} \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} (j-1) \binom{n+1}{j} \quad (\text{le terme pour } j=1 \text{ est nul}) \\ &= \frac{1}{n+1} \left( \sum_{j=1}^{n+1} j \binom{n+1}{j} - \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n+1}{j} \right) \\ &= \frac{1}{n+1} \left( (n+1)2^n - \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} + 1 \right) \\ &= \frac{1}{n+1} \left( (n+1)2^n - 2^{n+1} + 1 \right) \\ &= \frac{1}{n+1} \left( (n-1)2^n + 1 \right) \end{aligned}$$

$$P(C) = \frac{(n-1)2^n + 1}{n(n+1)2^{n-1}}$$

- $P(C) \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{n2^n}{n^2 2^{n-1}} ;$

$$P(C) \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{2}{n}.$$