PROBABILITES DISCRETES

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–30

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires définie sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists\, p_n \in]0;1[,\ \forall k \in \mathbb{N},\ P(X_n = k) = \binom{k+n-1}{k} p_n^n (1-p_n)^k$$

1) Vérifier que l'on définit bien une variable aléatoire.

2) Montrer que si la suite $n(1-p_n)$ converge vers un réel $\lambda > 0$, alors la suite (X_n) converge en loi.

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

CORRIGE DE L'EXERCICE NUMERO 30

1)

Comme visiblement $\binom{k+n-1}{k} p_n^n(1-p_n)^k \geq 0$, il s'agit de montrer que la série de terme général $\binom{k+n-1}{k} p_n^n(1-p_n)^k$ converge et que sa somme vaut 1.

Cela utilise un résultat du cours ; rappelons brièvement comment le retrouver. On sait que $\forall x \in]-1;1[$, la série de terme général x^n converge et sa somme $S(x)$ vaut : $S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ (c'est un des résultats fondamentaux sur la série géométrique).
On sait, toujours d'après le cours, que sur l'intervalle $]-1;1[$, la fonction S est indéfiniment dérivable et que l'on peut dériver " terme à terme " .

$$\forall x \in]-1,1[,\ \forall k \in \mathbb{N},\ S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)x^{n-k} = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$$

Une récurrence, certainement faite en cours, a montré que la dérivée $k^{\text{ème}}$ de $x \longmapsto \frac{1}{1-x}$ est $x \longmapsto \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$.

Or $n(n-1)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$, donc $\frac{k!}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}$, d'où on obtient

$$\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}.$$

Dans la somme posons $j = n-k$, on obtient : $\sum_{j=0}^{+\infty} \binom{k+j}{k} x^j = \sum_{j=0}^{+\infty} \binom{k+j}{j} x^j$ d'après la symétrie des coefficients du binôme.

$$\text{Donc } \sum_{j=0}^{+\infty} \binom{k+j}{j} x^j = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$$

Appliquons ce résultat à $k = n-1$, il vient

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{j=0}^{+\infty} \binom{j+n-1}{j} x^j = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k+n-1}{k} x^k.$$

Appliquons ce résultat à $x = 1-p_n$ qui appartient bien à $]-1;1[$.

$$\frac{1}{(p_n)^n} = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k+n-1}{k} (1-p_n)^k, \text{ donc } \boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k+n-1}{k} (1-p_n)^k p_n^n = 1}$$

Conclusion : $\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} P(X_n = k) = 1}$

2)

Déterminons $\lim_{n\to+\infty} P(X_n = k) = \lim_{n\to+\infty} \binom{k+n-1}{k} (1-p_n)^k p_n^n$.

$$\begin{aligned}\binom{k+n-1}{k} (1-p_n)^k p_n^n &= \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} p_n^n (1-p_n)^k \\ &= \frac{(k+n-1)(k+n-2)\dots n}{k!} p_n^n (1-p_n^n)^k\end{aligned}$$

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Au voisinage de $+\infty$, $(k+n-1)(k+n-2)\dots n \underset{(n\to+\infty)}{\sim} n^k$ car on a le produit de k équivalents à n. Donc

$$\frac{(k+n-1)(k+n-2)\dots n}{k!} \underset{(n\to+\infty)}{\sim} \frac{n^k}{k!}. \qquad \textbf{(1)}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} n(1-p_n) = \lambda > 0 \Longrightarrow (1-p_n) \underset{(n\to+\infty)}{\sim} \frac{\lambda}{n}$, donc

$$(1-p_n)^k \underset{(n\to+\infty)}{\sim} \frac{\lambda^k}{n^k}. \qquad \textbf{(2)}$$

$p_n^n = \exp(n\ln p_n) = \exp(n\ln(1+p_n-1))$. Or $(1-p_n) \underset{(n\to+\infty)}{\sim} \frac{\lambda}{n} \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}(1-p_n) = 0$.

Il en résulte que $n\ln(1+p_n-1) \underset{(n\to+\infty)}{\sim} n(p_n-1) \underset{(n\to+\infty)}{\sim} -\lambda$.

Partant de là, $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln p_n = -\lambda$, donc par continuité de l'exponentielle au point $-\lambda$, on conclut : $\lim\limits_{n\to+\infty} \exp(n\ln p_n) = \exp(-\lambda)$ ou encore $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n^n = \exp(-\lambda)$, ce qui implique

$$p_n^n \underset{(n\to+\infty)}{\sim} \exp(-\lambda) \qquad \textbf{(3)}$$

En conclusion : les points (1), (2) et (3) permettent de conclure

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(k+n-1)(k+n-2)\dots n}{k!} p_n^n(1-p_n^n)^k = \exp(-\lambda)\frac{\lambda^k}{n^k},$$

$$\text{Donc } \lim_{n\to+\infty} P(X_n = k) = \exp(-\lambda)\frac{\lambda^k}{n^k}.$$

La suite (X_n) converge en loi vers une variable qui suit la loi de Poisson de paramètre λ

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021