PROBABLITES DISCRETES

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–31

Une urne contient b boules blanches, n boules noires, r boules rouges ; b, n sont des entiers naturels non nuls et r un entier naturel.

Un joueur tire une boule. Si elle est blanche, il gagne, si elle est noire, il perd, si elle est rouge, il la retire de l'urne et effectue un autre tirage (avant le second tirage, l'urne contient donc $r-1$ boules rouges). La partie s'achève lorsque le joueur a perdu ou gagné.

1) On note B_i (resp N_i,R_i) l'événement : " le joueur tire une blanche (resp une noire, une rouge) au i ème tirage.

On note G_r l'événement : " le joueur gagne en commençant ses tirages dans une urne contenant r boules rouges.

a) Calculer les probabilités $P(G_0)$, $P(G_1)$.

b) Trouver une relation entre $P(G_r)$ et $P(G_{r-1})$.

c) Calculer $P(G_r)$.

2) Soit X_r la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour qu'une partie s'achève.

a) Calculer les espérances $E(X_0)$, $E(X_1)$, $E(X_2)$.

b) Trouver une relation entre $P(X_r = k)$ et $P_{r-1}(k-1)$ pour $r \geq 1$ et $k \geq 2$, puis entre $E(X_r)$ et $E(X_{r-1})$.

c) Calculer $E(X_r)$.

CORRIGE DE L'EXERCICE NUMERO 31

1–a)

Si $r = 0$, il n'y a aucune boule rouge dans l'urne, donc le joueur gagne ou perd au premier tirage. Notons que l'urne contient $n + b$ boules.

$P(G_0) = P(B_1) = \dfrac{b}{b+n}\cdot$

Si $r = 1$, il y a une boule rouge dans l'urne. Le joueur peut gagner au premier tirage ou au second. Notons que l'urne contient initialement $n + b + 1$ boules.

$G_1 = B_1 \cup (R_1 \cap B_2)$, réunion d'événements incompatibles, donc

$$\begin{aligned}
P(G_1) &= P(B_1) + P(R_1)P_{R_1}(B_2)\\
&= \frac{b}{n+b+1} + \frac{1}{n+b+1} \times \frac{b}{b+n}\\
&= \frac{b}{n+b+1}\left(1 + \frac{1}{b+n}\right)\\
&= \frac{b}{n+b+1} \times \frac{b+n+1}{n+b}
\end{aligned}$$

$$P(G_1) = \frac{b}{b+n}$$

1–b)

Dans le cas général, lorsqu'il y a r boules rouges dans l'urne, le joueur peut gagner au premier tirage en tirant une boule blanche ou il peut tirer une boule rouge et gagner après, c'est-à-dire à partir d'une urne qui contient $(r-1)$ boules rouges.

Formalisons cela. La famille d'événements (B_1, R_1, N_1) forme un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales,

$P(G_r) = P(B_1)P_{B_1}(G_r) + P(R_1)P_{R_1}(G_r) + P(N_1)P_{N_1}(G_r)$.

$P_{B_1}(G_r) = 1$ car s'il a tiré une boule blanche au premier tirage, il a gagné.

$P_{R_1}(G_r) = P(G_{r-1})$; en effet, si l'événement R_1 est réalisé, il y a un deuxième tirage dans une urne qui contient $(r-1)$ boules rouges et dans ces conditions, la probabilité de gagner est $P(G_{r-1})$.

$P_{N_1}(G_r) = 0$ car s'il a tiré une boule noire au premier tirage, il a perdu.

$P(G_r) = \dfrac{b}{b+n+r} + \dfrac{r}{b+n+r}P(G_{r-1})$

1–c)

On a démontré que $P(G_0) = P(G_1) = \dfrac{b}{b+n}$. Montrons donc par récurrence que $\forall r \in \mathbb{N},\ P(G_r) = \dfrac{b}{b+n}\cdot$

Cette propriété est initialisée.

Hérédité : supposons que pour un entier r donné on ait $P(G_r) = \dfrac{b}{b+n}\cdot$ Utilisons la relation précédemment trouvée,

$$\begin{aligned}
P(G_{r+1}) &= \frac{b}{b+n+r+1} + \frac{r+1}{b+n+r+1}P(G_r)\\
&\frac{b}{b+n+r+1} + \frac{r+1}{b+n+r+1}\frac{b}{b+n} \qquad \text{grâce à l'hypothèse de récurrence}\\
&= \frac{b}{b+n+r+1}\left(1 + \frac{r+1}{b+n}\right)\\
&= \frac{b}{b+n+r+1}\frac{b+n+r+1}{b+n}\\
&= \frac{b}{b+n}
\end{aligned}$$

La propriété est héréditaire et par principe du raisonnement par récurrence :

$$\boxed{\forall r \in \mathbb{N},\ P(G_r) = \frac{b}{b+n}\cdot}$$

2–a)

- $X_0(\Omega) = \{1\}$ car on perd ou on gagne dès le premier tirage. $E(X_0) = 1$.
- $X_1(\Omega) = \{1, 2\}$

$P(X_1 = 1) = P(B_1 \cup N_1) = \dfrac{n+b}{n+b+1}\cdot$

$$\begin{aligned} P(X_1 = 2) &= 1 - P(X_1 = 1) \\ &= 1 - \frac{n+b}{n+b+1} \\ &= \frac{1}{n+b+1} \end{aligned}$$

$E(X_1) = \dfrac{n+b}{n+b+1} + \dfrac{2}{n+b+1} = \dfrac{n+b+2}{n+b+1}\cdot$

On remarque que $E(X_0) = \dfrac{n+b+1}{n+b+1}$ **et** $E(X_1) = \dfrac{n+b+2}{n+b+1}$**.**

- $X_2(\Omega) = \{1, 2, 3\}$

$P(X_2 = 1) = P(B_1 \cup N_1) = \dfrac{b+n}{b+n+2}\cdot$

$P(X_2 = 2) = P(R_1 \cap (B_2 \cup N_2)) = P(R_1) \times P_{R_1}(B_2 \cup N_2) = \dfrac{2}{n+b+2} \times \dfrac{b+n}{b+n+1}\cdot$

On déduit $P(X_2 = 3) = 1 - P(X_2 = 1) - P(X_2 = 2)\cdot$

$$\begin{aligned} E(X_2) &= P(X_2 = 1) + 2P(X_2 = 2) + 3P(X_2 = 3) \\ &= P(X_2 = 1) + 2P(X_2 = 2) + 3(1 - P(X_2 = 1) - P(X_2 = 2)) \\ &= 3 - 2P(X_2 = 1) - P(X_2 = 2) \\ &= 3 - \frac{2(b+n)}{b+n+2} - \frac{2(b+n)}{(b+n+2)(b+n+1)} \\ &= 3 - \frac{2(b+n)}{b+n+2}\left(1 + \frac{1}{b+n+1}\right) \\ &= 3 - \frac{2(b+n)}{b+n+2} \times \frac{b+n+2}{b+n+1} \\ &= 3 - \frac{2(b+n)}{b+n+1} \end{aligned}$$

$$E(X_2) = \frac{b+n+3}{b+n+1}\cdot$$

On remarque que pour $r = 0, 1, 2,\ E(X_r) = \dfrac{n+b+r+1}{b+n+1}$**.**

2–b)

Soit $k \geq 2$. Utilisons le système complet d'événements (B_1, N_1, R_1). Notons que $X_r(\Omega) = \{1, 2, \ldots, r+1\}$ et soit $k \in [\![2, r+1]\!]$.

$(X_r = k) = \Big(R_1 \cap (X_r = k)\Big) \cup \Big((B_1 \cup N_1) \cap (X_r = k)\Big)$. L'événement $\Big((B_1 \cup N_1) \cap (X_r = k)\Big)$ est vide car si on a réalisé $(B_1 \cup N_1)$, alors X_r a pris la valeur 1 et ici $k \geq 2$. Il y a donc une incompatibilité. Il en résulte que $(X_r = k) = R_1 \cap (X_r = k)$.

$P(X_r = k) = P(R_1)P_{R_1}(X_r = k) = \dfrac{r}{n+b+r}P(X_{r-1} = k-1)$. En effet, si l'événement R_1 est réalisé, l'urne contient $(r-1)$ boules rouges et on a déjà effectué un tirage . X_r prendra la valeur r si et seulement si la partie s'arrête après $k-1$ tirages à partir d'une urne qui contient $r-1$ boules rouges ; c'est-à-dire si la variable X_{r-1} prend la valeur $k-1$.

$$
\begin{aligned}
E(X_r) &= P(X_r=1)+\sum_{k=2}^{r+1} kP(X_r=k)\\
&= P(X_r=1)+\sum_{k=2}^{r+1} \frac{kr}{n+b+r}P(X_{r-1}=k-1) \qquad \text{posons } j=k-1\\
&= P(X_r=1)+\frac{r}{n+b+r}\sum_{j=1}^{r}(j+1)P(X_{r-1}=j)\\
&= P(X_r=1)+\frac{r}{n+b+r}\Big(\sum_{j=1}^{r} jP(X_{r-1}=j)+\sum_{j=1}^{r}P(X_{r-1}=j)\Big)\\
&= \frac{n+b}{n+b+r}+\frac{r}{n+b+r}\Big(E(X_{r-1})+1\Big)
\end{aligned}
$$

$$E(X_r)=\frac{n+b+r}{n+b+r}+\frac{r}{n+b+r}E(X_{r-1})=1+\frac{r}{n+b+r}E(X_{r-1})$$

2−c)

Montrons par récurrence sur r que $E(X_r)=\frac{n+b+r+1}{b+n+1}$.

Cette relation est initialisée pour $r=0,1,2$ d'après la fin du a).

Supposons que pour un entier r donné, on ait $E(X_r)=\frac{n+b+r+1}{b+n+1}$.

Appliquons la relation précédente pour $r+1$ au lieu de r.

$$
\begin{aligned}
E(X_{r+1}) &= 1+\frac{r+1}{n+b+r+1}E(X_r)\\
&= 1+\frac{r+1}{n+b+r+1}\,\frac{n+b+r+1}{b+n+1}\\
&= 1+\frac{r+1}{b+n+1}=\frac{b+n+r+2}{b+n+1}
\end{aligned}
$$

La propriété est héréditaire et par conséquent :

Pour tout entier naturel r : $E(X_r)=\frac{n+b+r+1}{b+n+1}$.