



POLYNOMES 2 HEC.ESCP

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE-2

Soit P un polynôme appartenant à $\mathbb{R}_n[X]$, de degré n , ($n \geq 2$), admettant n racines réelles distinctes.

Que peut-on dire des racines de P' ?

Comparer la moyenne arithmétique des racines de P avec celle des racines de P' .

Indications - Polynômes.2

On montrera que P' admet $n - 1$ racines réelles distinctes ; on factorisera P et P' .
Réponse : les deux moyennes sont égales.

Éléments de correction : Polynômes.2

• Notons x_1, \dots, x_n les n racines réelles de P . La fonction polynomiale $x \mapsto P(x)$ est continue, dérivable sur \mathbb{R} .

Soit $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. On applique le théorème de Rolle sur $[x_i, x_{i+1}]$. $P(x_i) = P(x_{i+1}) = 0$; donc il existe $\alpha_i \in]x_i, x_{i+1}[$ tel que $P'(\alpha_i) = 0$.

Cela donne déjà $n-1$ racines réelles distinctes de P' . Or P' est de degré $n-1$, donc il n'a pas d'autres racines.

P' admet $n-1$ racines réelles, distinctes

• Ecrivons $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ où $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et $a_n \neq 0$.

On peut factoriser $P : P = a_n \sum_{k=0}^n (X - x_k)$. Développons maintenant pour exprimer la somme S_n des racines de P à l'aide des coefficients de P .

$$\begin{aligned} P &= a_n \left(X^n - (x_1 + \dots + x_n) X^{n-1} + \dots + (-1)^n x_1 \times \dots \times x_n \right) \\ &= a_n X^n - a_n S_n X^{n-1} + \dots + a_n (-1)^n x_1 \times \dots \times x_n \end{aligned}$$

Par unicité des coefficients (ou par unicité de la décomposition de P dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$), on a :

$$a_{n-1} = -a_n S_n, \text{ donc } \frac{S_n}{n} = -\frac{a_{n-1}}{na_n}.$$

Procédons de la même manière pour P' et notons S'_n la somme des racines de P' :

$$P' = \sum_{k=1}^{n-1} k a_k X^{k-1} ; \text{ donc}$$

$$\begin{aligned} P' &= na_n (X - \alpha_1) \times \dots \times (X - \alpha_{n-1}) \\ &= na_n \left(X^{n-1} - (\alpha_1 + \dots + \alpha_{n-1}) X^{n-2} + \dots + (-1)^{n-1} \alpha_1 \times \dots \times \alpha_{n-1} \right) \\ &= na_n X^{n-1} - na_n S'_n X^{n-2} + \dots + na_n (-1)^{n-1} \alpha_1 \times \dots \times \alpha_{n-1} \end{aligned}$$

On obtient $(n-1)a_{n-1} = -na_n S'_n$, soit

$$\frac{S'_n}{n-1} = -\frac{a_{n-1}}{na_n} = \frac{S_n}{n} : \text{ les deux moyennes sont égales}$$