



**POLYNOMES 2 HEC.ESCP**

**ENONCE DE L'EXERCICE**

**ENONCE-2**

Soit  $P$  un polynôme appartenant à  $\mathbb{R}_n[X]$ , de degré  $n$ , ( $n \geq 2$ ), admettant  $n$  racines réelles distinctes.

Que peut-on dire des racines de  $P'$  ?

Comparer la moyenne arithmétique des racines de  $P$  avec celle des racines de  $P'$ .

## Indications - Polynômes.2

On montrera que  $P'$  admet  $n - 1$  racines réelles distinctes ; on factorisera  $P$  et  $P'$ .  
Réponse : les deux moyennes sont égales.

## Éléments de correction : Polynômes.2

• Notons  $x_1, \dots, x_n$  les  $n$  racines réelles de  $P$ . La fonction polynomiale  $x \mapsto P(x)$  est continue, dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

Soit  $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ . On applique le théorème de Rolle sur  $[x_i, x_{i+1}]$ .  $P(x_i) = P(x_{i+1}) = 0$  ; donc il existe  $\alpha_i \in ]x_i, x_{i+1}[$  tel que  $P'(\alpha_i) = 0$ .

Cela donne déjà  $n-1$  racines réelles distinctes de  $P'$ . Or  $P'$  est de degré  $n-1$ , donc il n'a pas d'autres racines.

**$P'$  admet  $n-1$  racines réelles, distinctes**

• Ecrivons  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$  où  $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$  et  $a_n \neq 0$ .

On peut factoriser  $P$  :  $P = a_n \sum_{k=0}^n (X - x_k)$ . Développons maintenant pour exprimer la somme  $S_n$  des racines de  $P$  à l'aide des coefficients de  $P$ .

$$\begin{aligned} P &= a_n \left( X^n - (x_1 + \dots + x_n) X^{n-1} + \dots + (-1)^n x_1 \times \dots \times x_n \right) \\ &= a_n X^n - a_n S_n X^{n-1} + \dots + a_n (-1)^n x_1 \times \dots \times x_n \end{aligned}$$

Par unicité des coefficients (ou par unicité de la décomposition de  $P$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}_n[X]$ ), on a :

$$a_{n-1} = -a_n S_n, \text{ donc } \frac{S_n}{n} = -\frac{a_{n-1}}{na_n}.$$

Procédons de la même manière pour  $P'$  et notons  $S'_n$  la somme des racines de  $P'$  :

$$P' = \sum_{k=1}^{n-1} k a_k X^{k-1} ; \text{ donc}$$

$$\begin{aligned} P' &= na_n (X - \alpha_1) \times \dots \times (X - \alpha_{n-1}) \\ &= na_n \left( X^{n-1} - (\alpha_1 + \dots + \alpha_{n-1}) X^{n-2} + \dots + (-1)^{n-1} \alpha_1 \times \dots \times \alpha_{n-1} \right) \\ &= na_n X^{n-1} - na_n S'_n X^{n-2} + \dots + na_n (-1)^{n-1} \alpha_1 \times \dots \times \alpha_{n-1} \end{aligned}$$

On obtient  $(n-1)a_{n-1} = -na_n S'_n$ , soit

$$\frac{S'_n}{n-1} = -\frac{a_{n-1}}{na_n} = \frac{S_n}{n} : \text{ les deux moyennes sont égales}$$