FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–7

Soit f l'application définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(x,y) = \frac{x^2 + xy + \sqrt{y}}{x\sqrt{y}}$$

1–a) Montrer que l'application f est de classe C^1 sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

b) Déterminer les points critiques de f.

c) Quelle est la nature de ces points critiques ?

d) La fonction f est-elle majorée sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$?

2–a) Montrer que pour tout $(a,b,c) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$, $\dfrac{a+b+c}{3} \geq (abc)^{\frac{1}{3}}$.

b) Montrer que f admet un minimum global sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$, que l'on déterminera.

3) Résoudre sur $\mathbb{R}^2$ l'inéquation : $e^{2x} + e^y \leq e^{x+y}(3 - e^y)$

CORRIGE DE L'EXERCICE NUMERO 7

1–a)

La fonction $y \longmapsto \sqrt{y}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$; la fonction $x \longmapsto x$ également, donc, par produit, la fonction $(x, y) \longmapsto x\sqrt{y}$ est de classe C^1 sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

De manière aussi simple $(x, y) \longmapsto x^2 + xy + \sqrt{y}$ est de classe C^1 sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

Puisque $x\sqrt{y} > 0$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$, on peut conclure :

$$f \ : \ (x, y) \longmapsto \frac{x^2 + xy + \sqrt{y}}{x\sqrt{y}} \ \textbf{est de classe } C^1 \textbf{ sur } (\mathbb{R}_+^*)^2$$

1–b)

$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ f(x, y) = \dfrac{x}{\sqrt{y}} + \sqrt{y} + \dfrac{1}{x}.$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{y}} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - \sqrt{y}}{x^2\sqrt{y}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{x}{2y\sqrt{y}} + \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{-x + y}{2y\sqrt{y}}$$

$(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ est un point critique si et seulement si $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) & = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) & = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) & = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x & = y \\ x^2 & = \sqrt{y} \end{cases} \iff \begin{cases} x & = y \\ y^2 & = \sqrt{y} \end{cases} \iff \begin{cases} x & = y \\ y\sqrt{y} & = 1 \end{cases} \text{car } y \neq 0$$

Or $y\sqrt{y} = 1 \iff (\sqrt{y})^3 = 1$

$\iff \sqrt{y} = 1$ car la fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

$\iff y = 1$ car la fonction carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

Il y a un unique point critique : $(1, 1)$

1–c)

En fait la fonction f est de classe C^2 sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$: il suffit dans la démonstration précédente de changer C^1 en C^2. On peut donc appliquer le théorème de Schwarz :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y).$$

Employons les notations de Monge.

$$r(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{2}{x^3}$$

$$s(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = -\frac{1}{2y\sqrt{y}}$$

$$t(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{3x}{4}\frac{1}{y^2\sqrt{y}} - \frac{1}{4y\sqrt{y}}$$

$(s^2 - rt)(1, 1) = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4} < 0.$

f présente au point $(1, 1)$ un extremum local. $r(1, 1) = 2 > 0$, cet extremum est un minimum.

La fonction f présente au point $(1, 1)$ un minimum local

1–d)

Considérons le couple $(x,1)$ et faisons tendre x vers $+\infty$.

$$\lim_{(x,1)\to(+\infty,1)} f(x,y) = \lim_{(x,1)\to(+\infty,1)} \frac{x^2+x+1}{x} = +\infty.$$

La fonction f n'est pas majorée sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$

2–a)

Considérons la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x>0,\ \ g(x) = x+b+c-3\sqrt[3]{xbc}$$

La fonction $x \longmapsto \sqrt[3]{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que fonction réciproque de la fonction cube dont la dérivée sur $\mathbb{R}_+^*$ est strictement positive.

$$\begin{aligned}
\forall x>0,\ g'(x) &= 1-\frac{bc}{(xbc)^{\frac{2}{3}}}\\
&= \frac{x^{\frac{2}{3}}(bc)^{\frac{2}{3}}-bc}{(xbc)^{\frac{2}{3}}}\\
&= \frac{(bc)^{\frac{2}{3}}(x^{\frac{2}{3}}-(bc)^{\frac{1}{3}})}{(xbc)^{\frac{2}{3}}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g'(x)\geq 0 &\iff x^{\frac{2}{3}}-(bc)^{\frac{1}{3}})\geq 0\\
&\iff x^{\frac{2}{3}} \geq (bc)^{\frac{1}{3}}\\
&\iff x^2\geq bc \quad \text{car la fonction cube est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^*\\
&\iff x\geq \sqrt{bc} \quad \text{car } x>0 \text{ et la fonction } \sqrt{\ } \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^*.
\end{aligned}$$

On a le tableau de variations suivant :

x	0		$\sqrt{bc}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g		$\searrow$	$(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2$	$\nearrow$	

Calcul de $g(\sqrt{bc})$:

$$\begin{aligned}
g(\sqrt{bc}) &= b+c+\sqrt{bc}-3\sqrt[3]{(bc)^{\frac{1}{2}}\times bc}\\
&= b+c+\sqrt{bc}-3\sqrt[3]{(bc)^{\frac{3}{2}}}\\
&= b+c+\sqrt{bc}-3\sqrt{bc}\\
&= (\sqrt{b}-\sqrt{c})^2
\end{aligned}$$

Donc $\forall x\geq 0,\ \ x+b+c-3\sqrt[3]{xbc}\geq 0$, en particulier pour $x=a>0$, d'où le résultat

$$\forall (a,b,c)\in(\mathbb{R}_+^*)^3,\ \ \frac{a+b+c}{3}\geq (abc)^{\frac{1}{3}}$$

2–b)

$f(1,1)=3$, donc $f(x,y)-f(1,1) = \dfrac{x^2+xy+\sqrt{y}-3x\sqrt{y}}{x\sqrt{y}}$; du signe de $x^2+xy+\sqrt{y}-3x\sqrt{y}$.

D'après le résultat précédent appliqué à $a=x^2>0,\ \ b=xy>0$ et $c=\sqrt{y}>0$, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{x^2+xy+\sqrt{y}}{3} &\geq (x^3(\sqrt{y})^3)^{\frac{1}{3}}\\
&\geq x\sqrt{y}
\end{aligned}$$

Donc $x^2+xy+\sqrt{y}-3x\sqrt{y}\geq 0$ et par conséquent $\forall (x,y)\in(\mathbb{R}_+^*)^2,\ \ f(x,y)-f(1,1)\geq 0$.

La fonction f présente au point $(1,1)$ un minimum absolu

3)

$$\begin{aligned} e^{2x}+e^y \leq e^{x+y}(3-e^y) &\iff \frac{e^{2x}+e^y}{e^{x+y}} \leq 3-e^y \quad \text{car } e^{x+y}>0 \\ &\iff \frac{e^{2x}+e^y+e^y.e^{x+y}}{e^{x+y}} \leq 3 \\ &\iff \frac{(e^x)^2+e^x(e^y)^2+\sqrt{(e^y)^2}}{e^x.e^y} \leq 3 \\ &\iff g(e^x,e^y) \leq 3 \end{aligned}$$

D'après la question précédente, $g(a,b) \geq 3$ pour tout couple (a,b) de $(\mathbb{R}_+^*)^2$. L'inégalité $g(e^x,e^y) \leq 3$ équivaut donc à l'égalité $g(e^x,e^y)=3$. L'étude précédente a montré que cette égalité équivaut elle-même à $e^x=e^y=1$ puisque la fonction g possède un unique minimum au point $(1,1)$, minimum qui vaut précisément 3.

$$e^{2x}+e^y \leq e^{x+y}(3-e^y) \iff x=y=0$$