FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–7

Soit f l'application définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(x,y) = \frac{x^2 + xy + \sqrt{y}}{x\sqrt{y}}$$

1–a) Montrer que l'application f est de classe C^1 sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

b) Déterminer les points critiques de f.

c) Quelle est la nature de ces points critiques ?

d) La fonction f est-elle majorée sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$?

2–a) Montrer que pour tout $(a,b,c) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$, $\dfrac{a+b+c}{3} \geq (abc)^{\frac{1}{3}}$.

b) Montrer que f admet un minimum global sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$, que l'on déterminera.

3) Résoudre sur $\mathbb{R}^2$ l'inéquation : $e^{2x} + e^y \leq e^{x+y}(3 - e^y)$

 © EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

CORRIGE DE L'EXERCICE NUMERO 7

1–a)

La fonction $y \longmapsto \sqrt{y}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$; la fonction $x \longmapsto x$ également, donc, par produit, la fonction $(x,y) \longmapsto x\sqrt{y}$ est de classe C^1 sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

De manière aussi simple $(x,y) \longmapsto x^2 + xy + \sqrt{y}$ est de classe C^1 sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

Puisque $x\sqrt{y} > 0$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$, on peut conclure :

$$f \ : \ (x,y) \longmapsto \frac{x^2 + xy + \sqrt{y}}{x\sqrt{y}} \textbf{ est de classe } C^1 \textbf{ sur } (\mathbb{R}_+^*)^2$$

1–b)

$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \ f(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{y}} + \sqrt{y} + \dfrac{1}{x}$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{1}{\sqrt{y}} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - \sqrt{y}}{x^2\sqrt{y}} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= -\frac{x}{2y\sqrt{y}} + \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{-x+y}{2y\sqrt{y}} \end{aligned}$$

$(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ est un point critique si et seulement si $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x &= y \\ x^2 &= \sqrt{y} \end{cases} \iff \begin{cases} x &= y \\ y^2 &= \sqrt{y} \end{cases} \iff \begin{cases} x &= y \\ y\sqrt{y} &= 1 \text{ car } y \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Or } y\sqrt{y} = 1 &\iff (\sqrt{y})^3 = 1 \\ &\iff \sqrt{y} = 1 \quad \text{car la fonction cube est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^* \\ &\iff y = 1 \quad \text{car la fonction carrée est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^* \end{aligned}$$

Il y a un unique point critique : $(1,1)$

1–c)

En fait la fonction f est de classe C^2 sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$: il suffit dans la démonstration précédente de changer C^1 en C^2. On peut donc appliquer le théorème de Schwarz :

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y).$$

Employons les notations de Monge.

$$r(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{2}{x^3}$$

$$s(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -\frac{1}{2y\sqrt{y}}$$

$$t(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{3x}{4}\frac{1}{y^2\sqrt{y}} - \frac{1}{4y\sqrt{y}}$$

$(s^2 - rt)(1,1) = \dfrac{1}{4} - 1 = -\dfrac{3}{4} < 0$.

f présente au point $(1,1)$ un extremum local. $r(1,1) = 2 > 0$, cet extremum est un minimum.

La fonction f présente au point $(1,1)$ un minimum local

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

1–d)

Considérons le couple $(x,1)$ et faisons tendre x vers $+\infty$.

$$\lim_{(x,1)\to(+\infty,1)} f(x,y) = \lim_{(x,1)\to(+\infty,1)} \frac{x^2+x+1}{x} = +\infty.$$

La fonction f n'est pas majorée sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$

2–a)

Considérons la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x>0,\ g(x) = x+b+c-3\sqrt[3]{xbc}$$

La fonction $x \longmapsto \sqrt[3]{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que fonction réciproque de la fonction cube dont la dérivée sur $\mathbb{R}_+^*$ est strictement positive.

$$\begin{aligned}\forall x>0,\ g'(x) &= 1-\frac{bc}{(xbc)^{\frac{2}{3}}}\\ &= \frac{x^{\frac{2}{3}}(bc)^{\frac{2}{3}}-bc}{(xbc)^{\frac{2}{3}}}\\ &= \frac{(bc)^{\frac{2}{3}}(x^{\frac{2}{3}}-(bc)^{\frac{1}{3}})}{(xbc)^{\frac{2}{3}}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g'(x)\geq 0 &\iff x^{\frac{2}{3}}-(bc)^{\frac{1}{3}})\geq 0\\ &\iff x^{\frac{2}{3}}\geq (bc)^{\frac{1}{3}}\\ &\iff x^2\geq bc \quad \text{car la fonction cube est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^*\\ &\iff x\geq \sqrt{bc} \quad \text{car } x>0 \text{ et la fonction } \sqrt{\ } \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^*.\end{aligned}$$

On a le tableau de variations suivant :

x	0		$\sqrt{bc}$		$+\infty$
$g'(x)$	$-$		0	$+$	
g	$\searrow$		$(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2$	$\nearrow$	

Calcul de $g(\sqrt{bc})$:

$$\begin{aligned}g(\sqrt{bc}) &= b+c+\sqrt{bc}-3\sqrt[3]{(bc)^{\frac{1}{2}}\times bc}\\ &= b+c+\sqrt{bc}-3\sqrt[3]{(bc)^{\frac{3}{2}}}\\ &= b+c+\sqrt{bc}-3\sqrt{bc}\\ &= (\sqrt{b}-\sqrt{c})^2\end{aligned}$$

Donc $\forall x\geq 0,\ x+b+c-3\sqrt[3]{xbc}\geq 0$, en particulier pour $x=a>0$, d'où le résultat

$$\forall (a,b,c)\in(\mathbb{R}_+^*)^3,\ \frac{a+b+c}{3}\geq (abc)^{\frac{1}{3}}$$

2–b)

$f(1,1)=3$, donc $f(x,y)-f(1,1)=\dfrac{x^2+xy+\sqrt{y}-3x\sqrt{y}}{x\sqrt{y}}$; du signe de $x^2+xy+\sqrt{y}-3x\sqrt{y}$.

D'après le résultat précédent appliqué à $a=x^2>0,\ b=xy>0$ et $c=\sqrt{y}>0$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{x^2+xy+\sqrt{y}}{3} &\geq (x^3(\sqrt{y})^3)^{\frac{1}{3}}\\ &\geq x\sqrt{y}\end{aligned}$$

Donc $x^2+xy+\sqrt{y}-3x\sqrt{y}\geq 0$ et par conséquent $\forall (x,y)\in(\mathbb{R}_+^*)^2,\ f(x,y)-f(1,1)\geq 0$.

La fonction f présente au point $(1,1)$ un minimum absolu

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

3)

$$e^{2x}+e^y \leq e^{x+y}(3-e^y) \iff \frac{e^{2x}+e^y}{e^{x+y}} \leq 3-e^y \quad \text{car } e^{x+y}>0$$
$$\iff \frac{e^{2x}+e^y+e^y.e^{x+y}}{e^{x+y}} \leq 3$$
$$\iff \frac{(e^x)^2+e^x(e^y)^2+\sqrt{(e^y)^2}}{e^x.e^y} \leq 3$$
$$\iff g(e^x,e^y) \leq 3$$

D'après la question précédente, $g(a,b) \geq 3$ pour tout couple (a,b) de $(\mathbb{R}_+^*)^2$. L'inégalité $g(e^x,e^y) \leq 3$ équivaut donc à l'égalité $g(e^x,e^y)=3$. L'étude précédente a montré que cette égalité équivaut elle-même à $e^x=e^y=1$ puisque la fonction g possède un unique minimum au point $(1,1)$, minimum qui vaut précisément 3.

$$e^{2x}+e^y \leq e^{x+y}(3-e^y) \iff x=y=0$$

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021