DENOMBREMENT 1 HEC ESCP

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–1

Calculer $A(n)$, nombre de solutions $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$ de l'équation : $x + 13y + z = n$.

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Indications - dénombrement.1

On trouve $A(n) = \frac{1}{2}(2(n+1) - 13\lfloor\frac{n}{13}\rfloor)(\lfloor\frac{n}{13}\rfloor + 1)$ avec $\lfloor x\rfloor$ égal à la partie entière de x.

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Eléments de correction : Dénombrement.1

Calcul de $A(n)$

$x+13y+z=n \iff x+z=n-13y$ avec $0\leq y\leq \frac{n}{13}$ ou $0\leq y\leq \lfloor\frac{n}{13}\rfloor$ puisque y est un entier (la plus grande valeur entière inférieure ou égale à $\frac{n}{13}$ est exactement $\lfloor\frac{n}{13}\rfloor$).

Notons $E_n=\{(x,y,z)\in\mathbb{N}^3\ /\ x+13y+z=n\}$ et pour k fixé dans $[\![0,\lfloor\frac{n}{13}\rfloor]\!]$, notons $F_k=\{(x,k,z)\in\mathbb{N}^2\ /\ x+13k+z=n\}$

Alors $E_n=\bigcup_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{13}\rfloor} F_k$ et les F_k sont disjoints deux à deux (en un mot la famille $(F_k)_{0\leq k\leq\lfloor\frac{n}{13}\rfloor}$ forme une partition de E_n).

Pour k fixé, il y a autant de listes dans F_k que de couple $(x,z)\in\mathbb{N}^2$ tels que $x+z=n-13k$.

Donc $\text{Card}(F_k)=\begin{pmatrix}n-13k+1\\n-13k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}n-13k+1\\1\end{pmatrix}=n-13k+1$

$A(n)=\text{Card}(E_n)=\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{13}\rfloor}(n+1-13k)$

La suite $k\longmapsto n+1-13k$ est arithmétique, donc

$\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{13}\rfloor}(n+1-13k)=\frac{1}{2}(n+1+n+1-13\lfloor\frac{n}{13}\rfloor)(\lfloor\frac{n}{13}\rfloor+1)$

$$A(n)=\frac{1}{2}(2(n+1)-13\lfloor\frac{n}{13}\rfloor)(\lfloor\frac{n}{13}\rfloor+1)$$

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021