DENOMBREMENT 1 HEC ESCP

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–1

Calculer $A(n)$, nombre de solutions $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$ de l'équation : $x + 13y + z = n$.

 Jean MALLET

Indications - dénombrement.1

On trouve $A(n) = \frac{1}{2}(2(n+1) - 13\lfloor \frac{n}{13} \rfloor)(\lfloor \frac{n}{13} \rfloor + 1)$ avec $\lfloor x \rfloor$ égal à la partie entière de x.

Eléments de correction : Dénombrement.1

Calcul de $A(n)$

$x+13y+z=n \iff x+z=n-13y$ avec $0 \leq y \leq \frac{n}{13}$ ou $0 \leq y \leq \lfloor \frac{n}{13} \rfloor$ puisque y est un entier (la plus grande valeur entière inférieure ou égale à $\frac{n}{13}$ est exactement $\lfloor \frac{n}{13} \rfloor$).

Notons $E_n = \{(x,y,z) \in \mathbb{N}^3 \ / \ x+13y+z=n\}$ et pour k fixé dans $[\![0, \lfloor \frac{n}{13} \rfloor]\!]$, notons $F_k = \{(x,k,z) \in \mathbb{N}^2 \ / \ x+13k+z=n\}$

Alors $E_n = \displaystyle\bigcup_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{13} \rfloor} F_k$ et les F_k sont disjoints deux à deux (en un mot la famille $(F_k)_{0 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{13} \rfloor}$ forme une partition de E_n).

Pour k fixé, il y a autant de listes dans F_k que de couple $(x,z) \in \mathbb{N}^2$ tels que $x+z=n-13k$.

Donc $\mathrm{Card}(F_k) = \binom{n-13k+1}{n-13k} = \binom{n-13k+1}{1} = n-13k+1$

$$A(n) = \mathrm{Card}(E_n) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{13} \rfloor} (n+1-13k)$$

La suite $k \longmapsto n+1-13k$ est arithmétique, donc

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{13} \rfloor} (n+1-13k) = \frac{1}{2}(n+1+n+1-13\lfloor \frac{n}{13} \rfloor)(\lfloor \frac{n}{13} \rfloor + 1)$$

$$A(n) = \frac{1}{2}(2(n+1)-13\lfloor \frac{n}{13} \rfloor)(\lfloor \frac{n}{13} \rfloor + 1)$$