



## ANALYSE

## ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

## ENONCE-25

Pour  $x$  réel on pose  $f(x) = \int_x^{3x} \exp\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) dt$ .

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de  $f$  et étudier les variations de  $f$ .
- 2) a) Déterminer, si elle existe, la limite de  $f$  en 0.  
b) Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$  et donner un équivalent de  $f$  en  $+\infty$ .
- 3) a) A l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 appliquée à la fonction  $\exp$ , montrer que

$$\forall u > 0, \left| \exp(u) - 1 - u - \frac{u^2}{2} \right| \leq \frac{u^3}{6} \exp(u).$$

En déduire que

$$\forall x > 0 \text{ et } \forall t \in [x; 3x], \left| \exp \frac{1}{\sqrt{t}} - 1 - \frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{2t} \right| \leq \left( \frac{1}{t\sqrt{t}} \right) \exp \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

- b) Montrer alors que :

$$\left| f(x) - 2x - 2(\sqrt{3} - 1)\sqrt{x} - \frac{1}{2} \ln 3 \right| \leq \frac{1}{3} \left( \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{3x}} \right) \exp \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

- c) En déduire que l'on peut écrire au voisinage de  $+\infty$  :

$$f(x) = 2x + 2(\sqrt{3} - 1)\sqrt{x} + \frac{1}{2} \ln 3 + \varepsilon(x), \quad \text{avec } \lim_{x \rightarrow +\infty} \varepsilon(x) = 0.$$

## CORRIGE DE L'EXERCICE

### CORRIGE :

#### QUESTION-1

Sur  $\mathbb{R}_+^*$ , la fonction  $\varphi : t \mapsto \exp \frac{1}{\sqrt{t}}$  est continue. En effet,

$w : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$  est continue de  $\mathbb{R}_+^*$  dans  $\mathbb{R}$  et  $\exp$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , donc  $\exp \circ w$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

Donc  $\varphi$  admet sur  $\mathbb{R}_+^*$  des primitives. Soit  $\Phi$  l'une d'entre elles.

Pour  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $f(x) = \Phi(3x) - \Phi(x)$ .

$x \mapsto \Phi(3x)$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  car  $x \mapsto 3x$  est dérivable de  $\mathbb{R}_+^*$  dans  $\mathbb{R}_+^*$  et  $\Phi$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

$$\text{Donc } \forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = 3\Phi'(3x) - \Phi'(x) = 3 \exp \frac{1}{\sqrt{3x}} - \exp \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

- Signe de  $f'(x)$ .

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3 \exp \frac{1}{\sqrt{3x}} - \exp \frac{1}{\sqrt{x}} \\ &= \exp \frac{1}{\sqrt{3x}} \left( 3 - \exp \left( \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{3x}} \right) \right) \\ &= \exp \frac{1}{\sqrt{3x}} \underbrace{\left( 3 - \exp \left( \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3x}} \right) \right)}_{v(x)} \end{aligned}$$

**Le signe de  $f'(x)$  est celui de  $v(x) = 3 - \exp \left( \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3x}} \right)$ .**

$$\begin{aligned} v(x) \geq 0 &\iff \exp \left( \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3x}} \right) \leq 3 \\ &\iff 0 < \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3x}} \leq \ln 3 \quad (\text{car } \ln \text{ est strictement croissante}) \\ &\iff \sqrt{3x} \geq \frac{\sqrt{3}-1}{\ln 3} > 0 \\ &\quad (\text{car } \sqrt{3x} \text{ et } \ln 3 \text{ sont strictement positifs}) \\ &\iff 3x \geq \left( \frac{\sqrt{3}-1}{\ln 3} \right)^2 > 0 \\ &\quad (\text{inégalité entre nombres strictement positifs}) \\ &\iff x \geq \frac{1}{3} \left( \frac{\sqrt{3}-1}{\ln 3} \right)^2 > 0 \quad (\text{on a divisé par } 3 > 0). \end{aligned}$$

Cela donne le tableau de variations suivant où  $\alpha = \frac{1}{3} \left( \frac{\sqrt{3}-1}{\ln 3} \right)^2$ :

$x$	0	$\alpha$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f$	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$ $+\infty$

## QUESTION-2

Sur  $\mathbb{R}_+^*$ , la fonction  $t \mapsto \exp \frac{1}{\sqrt{t}}$  est décroissante. Donc elle est décroissante sur  $[x, 3x], \forall x > 0$ .

On a  $\forall t \in [x, 3x], \exp \frac{1}{\sqrt{3x}} \leq \exp \frac{1}{\sqrt{t}} \leq \exp \frac{1}{\sqrt{x}}$ .

Intégrons cet encadrement entre  $x$  et  $3x$  (les bornes sont dans l'ordre croissant car  $x > 0$ ).  
On obtient :

$$\int_x^{3x} \exp \frac{1}{\sqrt{3x}} dt \leq \int_x^{3x} \exp \frac{1}{\sqrt{t}} dt \leq \int_x^{3x} \exp \frac{1}{\sqrt{x}} dt, \text{ soit}$$

$$2x \exp \frac{1}{\sqrt{3x}} \leq f(x) \leq 2x \exp \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (1)$$

a)

Déterminons la limite de  $f$  en  $0^+$ .

Posons  $h(x) = x \exp \frac{1}{\sqrt{3x}}$ .

$h(x)$  est strictement positif, on peut en prendre le  $\ln$ .

$$\ln h(x) = \ln x + \frac{1}{\sqrt{3x}} = \frac{1}{\sqrt{3x}} (\sqrt{3}\sqrt{x} \ln x + 1).$$

Par croissances comparées,  $\lim_{x \rightarrow +} \sqrt{x} \ln x = 0$ , donc

$\lim_{x \rightarrow +} (\sqrt{3}\sqrt{x} \ln x + 1) = 1$ , et comme  $\lim_{x \rightarrow +} \frac{1}{\sqrt{3x}} = +\infty$ , on conclut que

$\lim_{x \rightarrow +} \ln h(x) = +\infty$ . Or  $h(x) = \exp \ln h(x)$ , donc

$$\lim_{x \rightarrow +} h(x) = +\infty.$$

$$2h(x) \leq f(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow +} h(x) = +\infty \text{ implique } \lim_{x \rightarrow +} f(x) = +\infty.$$

b)

Déterminons la limite de  $f$  en  $+\infty$ .

Reprenons l'encadrement  $2x \exp \frac{1}{\sqrt{3x}} \leq f(x) \leq 2x \exp \frac{1}{\sqrt{x}}$ .

$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x \exp \frac{1}{\sqrt{3x}} = +\infty$  car  $\exp \frac{1}{\sqrt{3x}} \rightarrow 1$ . Donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Divisons l'encadrement par  $2x > 0$ , on obtient

$$\exp \frac{1}{\sqrt{3x}} \leq \frac{f(x)}{2x} \leq \exp \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Or  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp \frac{1}{\sqrt{3x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp \frac{1}{\sqrt{x}} = 1$ .

Le théorème d'encadrement permet de conclure que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{2x} = 1$ .

$$\text{Donc } f(x) \underset{+\infty}{\sim} 2x.$$

QUESTION-3

a)

• La fonction  $\exp$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  ; on peut donc lui appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à n'importe quel ordre sur n'importe quel intervalle fermé.

Appliquons Taylor-Lagrange à l'ordre deux sur l'intervalle  $[0, u]$  où  $u \in \mathbb{R}_+^*$ .

$|\exp(u) - 1 - u - \frac{u^2}{2}| \leq M \frac{u^3}{6}$  où  $M$  est un majorant de la dérivée troisième de  $\exp$  sur  $[0; u]$ , donc  $M$  est un majorant de  $\exp$  sur  $[0; u]$ . On peut prendre pour  $M$  le maximum de  $\exp$  sur  $[0; u]$ , soit  $M = \exp(u)$ .

L'inégalité de Taylor-Lagrange devient

$$|\exp(u) - 1 - u - \frac{u^2}{2}| \leq \frac{u^3}{6} \exp(u).$$

• Soit  $u = \frac{1}{\sqrt{t}}$  pour  $t \in [x; 3x]$ . On a alors

$$\left| \exp\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) - 1 - \frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{2t} \right| \leq \frac{1}{6t^{\frac{3}{2}}} \exp\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right).$$

Or  $0 < x \leq t \leq 3x$ , donc **puisque la fonction racine carrée est croissante** on obtient l'encadrement

$$0 < \sqrt{x} \leq \sqrt{t} \leq \sqrt{3x}.$$

On peut passer aux inverses car il s'agit de **nombres strictement positifs** :

$$\frac{1}{\sqrt{3x}} \leq \frac{1}{\sqrt{t}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}, \text{ donc}$$

$\forall t \in [x; 3x], \exp \frac{1}{\sqrt{t}} \leq \exp \frac{1}{\sqrt{x}}$  du fait de la croissance de  $\exp$ .

L'inégalité de Taylor-Lagrange devient :

$$\forall t \in [x; 3x], \left| \exp \frac{1}{\sqrt{t}} - 1 - \frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{2t} \right| \leq \left( \frac{1}{6t^{\frac{3}{2}}} \right) \exp \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

b)

Intégrons entre  $x$  et  $3x$  ; comme **les bornes sont dans l'ordre croissant**, il vient

$$\int_x^{3x} \left| \exp \frac{1}{\sqrt{t}} - 1 - \frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{2t} \right| dt \leq \exp \frac{1}{\sqrt{x}} \int_x^{3x} \frac{1}{6t^{\frac{3}{2}}} dt, \text{ soit}$$

$$\int_x^{3x} \left| \exp \frac{1}{\sqrt{t}} - 1 - \frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{2t} \right| dt \leq \frac{1}{3} \exp \frac{1}{\sqrt{x}} \left[ -\frac{1}{\sqrt{t}} \right]_x^{3x}. \text{ Ce qui donne}$$

$$\int_x^{3x} \left| \exp \frac{1}{\sqrt{t}} - 1 - \frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{2t} \right| dt \leq \frac{1}{3} \left( \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{3x}} \right) \exp \frac{1}{\sqrt{x}}. \quad (1)$$

**Or on sait, puisque  $x \leq 3x$ , que**

$$\left| \int_x^{3x} \left( \exp \frac{1}{\sqrt{t}} - 1 - \frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{2t} \right) dt \right| \leq \int_x^{3x} \left| \exp \frac{1}{\sqrt{t}} - 1 - \frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{2t} \right| dt. \quad (2)$$

On a donc finalement, en comparant (1) et (2),

$$\left| \int_x^{3x} \left( \exp \frac{1}{\sqrt{t}} - 1 - \frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{2t} \right) dt \right| \leq \frac{1}{3} \left( \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{3x}} \right) \exp \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Le premier membre se calcule et on obtient

$$\left| f(x) - 2x - 2(\sqrt{3} - 1)\sqrt{x} - \frac{1}{2} \ln 3 \right| \leq \frac{1}{3} \left( \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{3x}} \right) \exp \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

c)

$$\text{Posons } \varepsilon(x) = f(x) - 2x - 2(\sqrt{3} - 1)\sqrt{x} - \frac{1}{2} \ln 3.$$

$$\text{L'encadrement précédent donne } |\varepsilon(x)| \leq \frac{1}{3} \left( \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{3x}} \right) \exp \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} \left( \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{3x}} \right) \exp \frac{1}{\sqrt{x}} = 0, \text{ donc}$$

le théorème d'encadrement permet de conclure :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varepsilon(x) = 0$ .

L'égalité  $\varepsilon(x) = f(x) - 2x - 2(\sqrt{3} - 1)\sqrt{x} - \frac{1}{2} \ln 3$  est équivalente à

$$f(x) = 2x + 2(\sqrt{3} - 1)\sqrt{x} + \frac{1}{2} \ln 3 + \varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow +\infty} \varepsilon(x) = 0.$$

#### QUESTION-4

---

a)

La fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}_+$  par

$\forall x > 0, g(x) = 2x + 2(\sqrt{3} - 1)\sqrt{x} + \frac{1}{2} \ln 3$  est continue, dérivable, strictement croissante.

On a facilement le tableau de variations suivant :

$x$	0	$+\infty$
$g$	$\frac{1}{2} \ln 2$	$+\infty$
$\nearrow$		

$f(x) - g(x) = \varepsilon(x)$ , donc les courbes représentatives de  $f$  et de  $g$  sont asymptotes en  $+\infty$ .