ECRICOME

Banque d'épreuves communes
aux concours des Ecoles
esc bordeaux / esc marseille / icn nancy / esc reims / esc rouen / esc toulouse

CONCOURS D'ADMISSION

option economique

MATHÉMATIQUES

Année 2006

Aucun instrument de calcul n'est autorisé.
Aucun document n'est autorisé.

L'énoncé comporte 5 pages

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

Tournez la page
S.V.P

EXERCICE 1

. On considère la fonction f définie pour tout réel x par :

$$.f(x) = x + 1 + 2e^{x}$$

ainsi que la fonction g des deux variables réelles x et y définie par :

$$g(x, y) = e^{x}\left(x + y^{2} + e^{x}\right)$$

1. Recherche d'extremum local de g.

1. Etudier les variations de f et donner les limites de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ et $-\infty$.
2. Justifier l'existence d'une asymptote oblique au voisinage de $-\infty$ et donner la position de la courbe représentative de f par rapport à cette asymptote.
3. Déduire des variations de f l'existence d'un unique réel α, élément de l'intervalle $[-2, -1]$ tel que $f(\alpha) = 0$. (on rappelle que $e \simeq 2,7$)
4. Déterminer le seul point critique de g, c'est-à-dire le seul couple de $\mathbb{R}^2$, en lequel g est susceptible de présenter un extremum.
5. Vérifier que g présente un extremum relatif β en ce point. Est-ce un maximum ou un minimum ?
6. Montrer que l'on a :

$$4\beta + \alpha^{2} - 1 = 0$$

2. Etude d'une suite réelle.

On s'intéresse à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par son premier terme $u_0 = -1$ et par la relation

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$$

1. Prouver que f est convexe sur $\mathbb{R}$. En déduire que que pour tous réels x et t :

$$f(x) + (t - x) f'(x) \leqslant f(t)$$

2. En déduire l'inégalité suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \alpha \leqslant u_{n+1}$$

Puis que pour tout entier naturel n. :

$$\alpha \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant -1$$

En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers un réel à préciser

3. On admet que pour tout x de l'intervalle$[-2, -1]$:

$$0 \leqslant (x - \alpha) f'(x) - f(x) \leqslant \frac{(x - \alpha)^{2}}{e}$$

   (a) Prouver alors que pour tout entier naturel n :

$$0 \leqslant u_{n+1} - \alpha \leqslant \frac{(u_n - \alpha)^{2}}{e}$$

   (b) Puis démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$0 \leqslant u_n - \alpha \leqslant \frac{1}{e^{2^{n}} - 1}$$

4. Écrire un programme en langage Pascal permettant, lorsque l'entier naturel p est donné par l'utilisateur, de calculer une valeur approchée de α, de telle sorte que l'on ait :

$$0 \leqslant u_n - \alpha \leqslant 10^{-p}$$

EXERCICE 2

Pour tout entier naturel n, on définit la fonction f_n de la variable réelle x par :

$$f_n(x) = x^n \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

1. Justifier que $f_n(x)$ est négligeable devant $\dfrac{1}{x^2}$ au voisinage de $+\infty$.

2. Prouver la convergence de l'intégrale $\int\limits_0^{+\infty} f_n(x)\, dx$

3. O pose $I_n = \int\limits_0^{+\infty} f_n(x)\, dx$

   (a) A l'aide d'une intégration par parties portant sur des intégrales définies sur le segment $[0, A]$ avec $A \geqslant 0$, prouver que pour tout entier naturel n :

   $$I_{n+2} = (n+1)\, I_n$$

   (b) En utilisant la loi normale centrée réduite, justifier que :

   $$I_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

   (c) Donner la valeur de I_1

   (d) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

   $$\begin{aligned} I_{2n} &= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{(2n)!}{2^n n!} \\ I_{2n+1} &= 2^n n! \end{aligned}$$

4. Soit f la fonction définie pour tout réel x par :

   $$\begin{cases} f(x) = f_1(x) & \text{si } x \geqslant 0 \\ f(x) = 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

   (a) Démontrer que f est une densité de probabilité.

   (b) Soit X une variable aléatoire réelle qui admet f pour densité de probabilité.

      i. Justifier que X admet une espérance $E(X)$, et préciser sa valeur

      ii. Justifier que X admet une variance $V(X)$, et préciser sa valeur.

5. On désigne par F et G les fonctions de répartitions respectives de X et de $Y = X^2$

   (a) Exprimer $G(x)$ en fonction de $F(x)$ en distinguant les deux cas : $x < 0$ et $x \geqslant 0$

   (b) En déduire que Y est une variable à densité. Reconnaître la loi de Y et donner la valeur de $E(Y)$ et $V(Y)$

EXERCICE 3

E désigne l'espace des fonctions polynômes à coefficients réels, dont le degré est inférieur ou égal à l'entier naturel 2.

1. Etude d'un endomorphisme de E.

On considère l'application f qui, à tout élément P de E, associe la fonction polynôme Q telle que :

$$\text{pour tout } x \text{ réel : } \qquad Q(x) = (x-1)\,P'(x) + P(x)$$

et $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2)$ la base canonique de E définie par :

$$\text{pour tout réel } x : \qquad P_0(x) = 1,\ P_1(x) = x \text{ et } P_2(x) = x^2$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. Vérifier que la matrice A de f dans $\mathcal{B}$, s'écrit sous la forme :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$
3. Quelles sont les valeurs propres de f ? f est-il diagonalisable ? f est-il un automorphisme de E ?
4. Déterminer l'image par f des fonctions polynômes R_0, R_1, R_2 définies par :
$$\text{pour tout réel } x : \qquad R_0(x) = 1, \quad R_1(x) = x-1 \text{ et } R_2(x) = (x-1)^2$$
5. Montrer que $\mathcal{B}' = (R_0, R_1, R_2)$ est une base de vecteurs propres de f. Écrire la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ ainsi que la matrice D de f dans la base $\mathcal{B}'$.
6. Vérifier que pour tout réel x :
$$\begin{cases} R_2 x + 2R_1(x) + R_0(x) = P_2(x) \\ R_1(x) + R_0(x) = P_1(x) \end{cases}$$
En déduire la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$
7. Écrire A^{-1} en fonction de D^{-1}. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :
$$\left[A^{-1}\right]^n = P\left[D^{-1}\right]^n P^{-1}$$
et expliciter la troisième colonne de la matrice $\left[A^{-1}\right]^n$

2. Suite d'épreuves aléatoires.

On dispose d'une urne qui contient trois boules numérotées de 0 à 2.

On s'intéresse à une suite d'épreuves définies de la manière suivante :

- La première épreuve consiste à choisir au hasard une boule dans cette urne.
- Si j est le numéro de la boule tirée, on enlève de l'urne toutes les boules dont le numéro est strictement supérieur à j, le tirage suivant se faisant alors dans l'urne ne contenant plus que les boules numérotées de 0 à j.

On considère alors la variable aléatoire réelle X_k égale au numéro de la boule obtenue à la $k^{ème}$ épreuve ($k \geqslant 0$)
On note alors U_k la matrice unicolonne définie par :

$$U_k = \begin{pmatrix} P[X_k = 0] \\ P[X_k = 1] \\ P[X_k = 2] \end{pmatrix}$$

où $P[X_k = j]$ est la probabilité de tirer la boule numéro j à la $k^{ème}$ épreuve.
On convient de définir la matrice U_0 par :

$$U_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer la loi de X_2 (On pourra s'aider d'un arbre). Calculer l'espérance et la variance de X_2

2. Par utilisation de la formule des probabilités totales, prouver que pour tout entier naturel k :

$$U_{k+1} = A^{-1} U_k$$

3. Écrire U_k en fonction de A^{-1} et U_0

4. Pour tout k de $\mathbb{N}$, donner la loi de X_k et vérifier que l'on a :

$$\lim_{k \to +\infty} P[X_k = 0] = 1, \quad \lim_{k \to +\infty} P[X_k = 1] = 0, \quad \lim_{k \to +\infty} P[X_k = 2] = 0$$

ANNALES DE MATHEMATIQUES 2006

ECRICOME VOIE E 2006

CORRIGE

PREMIER EXERCICE

1.1 Recherche d'un extremum local de g

1)

La fonction f est définie, continue, dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions continues, dérivables sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 1 + 2\mathrm{e}^x}$$

$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x > 0 \Longrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) > 0$. On a le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Explication des limites :

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1) = \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty \Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

2)

Remarquons que $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-(x+1)) = \lim\limits_{x\to-\infty} 2\mathrm{e}^x = 0$. La droite d'équation $y = x+1$ est asymptote à la courbe C_f représentative de f en $-\infty$. De plus $f(x) - (x+1) = 2\mathrm{e}^x > 0$: la courbe C_f est au dessus de son asymptote.

3)

La fonction est continue sur $\mathbb{R}$, strictement croissante sur $\mathbb{R}$, c'est donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur son image qui est l'intervalle $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$ d'après le tableau de variations .

$\forall y \in \mathbb{R},\ \exists ! x \in \mathbb{R}\ /\ y = f(x)$; en particulier pour $y = 0$.

$$\boxed{\text{Il existe un unique réel } \alpha \text{ tel que } f(\alpha) = 0}$$

De plus, $f(-2) = -1 + 2\mathrm{e}^{-2} = -1 + \dfrac{2}{\mathrm{e}^2}$.

$\mathrm{e} > 2 \Longrightarrow \mathrm{e}^2 > 4 > 0$, donc $\dfrac{1}{\mathrm{e}^2} < \dfrac{1}{4}$ **puisqu'il s'agissait d'une inégalité entre nombres strictement positifs**. On a donc $-1 + \dfrac{2}{\mathrm{e}^2} < -1 + \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2} < 0$.

Conclusion : $f(-2) < 0$.

$f(-1) = \frac{2}{\mathrm{e}} > 0$. Sur l'intervalle $[-2,-1]$, la fonction f change de signe, donc elle s'annule (puisqu'elle est continue) : $\boxed{\alpha \in]-2,-1[}$

4)

L'application $(x,y) \mapsto x$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ en tant que fonction polynomiale et à valeurs dans $\mathbb{R}$; $t \mapsto \mathrm{e}^t$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, donc par composition, $(x,y) \mapsto \mathrm{e}^x$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

L'application $(x,y) \mapsto x + y^2$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ (fonction polynomiale).

Donc l'application $(x,y) \mapsto x + y^2 + \mathrm{e}^x$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ comme somme de fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

L'application $g : (x,y) \mapsto (x + y^2 + \mathrm{e}^x)\mathrm{e}^x$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ comme produit. On en déduit que g admet des dérivées partielles d'ordre 1 sur $\mathbb{R}^2$ (puisque g est **a fortiori** de classe C^1). $\mathbb{R}^2$ étant une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$, g ne peut admettre un extremum qu'en un point critique.

- **Recherche des points critiques**

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) & = 0 \\ \dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \mathrm{e}^x(x + y^2 + \mathrm{e}^x) + \mathrm{e}^x(1 + \mathrm{e}^x) & = 0 \\ 2y\mathrm{e}^x & = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \mathrm{e}^x(1 + x + y^2 + 2\mathrm{e}^x) & = 0 \\ y & = 0 \end{cases} \quad \text{car } \forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x \neq 0$$

$$\iff \begin{cases} 1 + x + y^2 + 2\mathrm{e}^x & = 0 \\ y & = 0 \end{cases} \quad \text{car } \forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x \neq 0$$

$$\iff \begin{cases} f(x) & = 0 \\ y & = 0 \end{cases} \quad \text{puisque } y = 0$$

$$\iff \begin{cases} x & = \alpha \\ y & = 0 \end{cases} \quad \text{d'après la question } \mathbf{3)}$$

$$\boxed{\text{La fonction } g \text{ admet un seul point critique : } (\alpha, 0)}$$

5)

La fonction g étant de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, elle admet des dérivées partielles d'ordre 2 continues sur $\mathbb{R}^2$. On peut donc appliquer à g le théorème de Schwarz, c'est-à-dire ,

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(x,y) = s(x,y)$$

.

Utilisons les notations de Monge ; $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) = r(x,y) \quad & = \mathrm{e}^x(1 + x + y^2 + 2\mathrm{e}^x) + \mathrm{e}^x(1 + 2\mathrm{e}^x) \\ & = \mathrm{e}^x(2 + x + y^2 + 4\mathrm{e}^x) \\ \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = t(x,y) \quad & = 2\mathrm{e}^x \\ s(x,y) \quad & = 2y\mathrm{e}^x \end{aligned}$$

Au point $(\alpha, 0)$:

$$\begin{aligned} r(\alpha,0) & = \mathrm{e}^\alpha(2 + \alpha + 4\mathrm{e}^\alpha) \\ t(\alpha,0) & = 2\mathrm{e}^\alpha \\ s(\alpha,0) & = 0 \end{aligned}$$

$(s^2 - rt)(\alpha,0) = -2\mathrm{e}^{2\alpha}(2 + \alpha + 4\mathrm{e}^\alpha)$. On sait que $-2 < \alpha < 1$, donc $2 + \alpha > 0$ et par suite $2 + \alpha + 4\mathrm{e}^\alpha > 0$ puisque $4\mathrm{e}^{2\alpha} > 0$

$(s^2 - rt)(\alpha, 0) < 0$, donc g possède en ce point un extremum local. Or $r(\alpha, 0) = e^{\alpha}(2 + \alpha + 4e^{\alpha}) > 0$, donc cet extremum est un minimum local.

6)

La valeur de ce minimum est $\beta = g(\alpha, 0) = e^{\alpha}(\alpha + e^{\alpha})$. Or on sait que $f(\alpha) = 0$, ce qui donne $\alpha + 1 + 2e^{\alpha} = 0$, d'où l'on tire : $e^{\alpha} = -\frac{1}{2}(1 + \alpha)$. Ainsi on obtient

$$\begin{aligned} \beta &= -\frac{1}{2}(\alpha+1)(\alpha - \frac{1}{2}(\alpha+1)) \\ &= -\frac{1}{2}(\alpha+1)(\frac{\alpha-1}{2}) \\ &= -\frac{\alpha^2-1}{4} \end{aligned}$$

Cette dernière égalité équivaut à $\boxed{4\beta + \alpha^2 - 1 = 0}$

1.2 Etude d'une suite réelle

1)

$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = 2e^x > 0$, donc

$$\text{La fonction } f \text{ est convexe sur } \mathbb{R}$$

Cela signifie que la courbe C_f est au dessus de ses tangentes.
Soit $x \in \mathbb{R}$; la tangente au point d'abscisse x de la courbe C_f a pour équation : $y = f'(x)(t - x) + f(x)$; la variable étant ici t, la courbe C_f a pour équation $y = f(t)$.
La courbe C_f au dessus de ses tangentes s'exprime ainsi :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R},\ f(x) + (t - x)f'(x) \leq f(t)}$$

2)

Remplaçons dans l'inégalité précédente x par u_n et t par u_{n+1}. On obtient $f(u_n) + (u_{n+1} - u_n)f'(u_n) \leq f(u_{n+1})$.

Par définition de la suite (u_n), on a $u_{n+1} - u_n = -\dfrac{f(u_n)}{f'(u_n)}$; l'inégalité précédente s'écrit alors :

$f(u_n) - \dfrac{f(u_n)}{f'(u_n)} f'(u_n) \leq f(u_{n+1})$, c'est-à-dire $0 \leq f(u_{n+1})$. Or $f(\alpha) = 0$, donc on peut écrire $f(\alpha) \leq f(u_{n+1})$. L'application f étant **strictement** croissante sur $\mathbb{R}$, on en déduit $\boxed{\alpha \leq u_{n+1}}$

On vient de montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha \leq u_{n+1}$, ce qui peut s'écrire $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \alpha \leq u_n$ (il suffit de faire le changement d'indice $k = n + 1$). Mais $u_0 = -1$ et $\alpha < -1$ d'après la question **1–3)**, donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha \leq u_n}$$

- La fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$, donc $\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha \leq u_n \Longrightarrow 0 \leq f(u_n)$

Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ -\dfrac{f(u_n)}{f'(u_n)} \leq 0$ puisque $f' > 0$ sur $\mathbb{R}$. Conclusion $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n \leq 0$

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est décroissante}}$$

On a donc en particulier : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \le u_0$, soit $u_n \le -1$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha \le u_{n+1} \le u_n \le -1 \\ \text{La suite } (u_n) \text{ est décroissante et minorée par } \alpha \text{ donc elle converge vers un réel } \ell \ge \alpha\end{array}}$$

- Détermination de ℓ.

f et f' sont continues sur $\mathbb{R}$ (d'après la question **1–3**), donc elles sont continues au point ℓ ; on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f'(u_n) = f'(\ell)$. De plus $f' > 0$ sur $\mathbb{R}$, donc $f'(\ell) \neq 0$ et on peut affirmer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{f(u_n)}{f'(u_n)} = \dfrac{f(\ell)}{f'(\ell)}$

Par passage à la limite, l'égalité $u_{n+1} - u_n = -\dfrac{f(u_n)}{f'(u_n)}$ donne $\ell - \ell = -\dfrac{f(\ell)}{f'(\ell)}$, soit $-f(\ell) = 0$.

$$\boxed{\ell = \alpha}$$

3–a)

Rappelons que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = -\dfrac{f(u_n)}{f'(u_n)}$, donc $u_{n+1} - \alpha = u_n - \alpha - \dfrac{f(u_n)}{f'(u_n)}$, soit encore $u_{n+1} - \alpha = \dfrac{(u_n - \alpha)f'(u_n) - f(u_n)}{f'(u_n)}$

On a vu au **1–3–3)** et au **1–2–2)** que $-2 \le \alpha \le u_n < -1$, donc $u_n \in [-2, -1]$; on peut donc utiliser l'inégalité admise en y remplaçant x par u_n. On obtient alors

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \le (u_n - \alpha)f'(u_n) - f(u_n) \le \frac{(u_n - \alpha)^2}{\mathrm{e}} \qquad (*)$$

D'autre part, $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 1 + 2\mathrm{e}^x$, donc $f'(x) > 1$, ce qui équivaut à $0 < \dfrac{1}{f'(x)} < 1$. En particulier

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < \frac{1}{f'(u_n)} < 1 \qquad (**)$$

Multiplions membre à membre les inégalités **(*)** et **(**)**. On trouve

$0 \le \dfrac{(u_n - \alpha)f'(u_n) - f(u_n)}{f'(u_n)} \le \dfrac{(u_n - \alpha)^2}{\mathrm{e}}$, c'est-à-dire

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \le u_{n+1} - \alpha \le \frac{(u_n - \alpha)^2}{\mathrm{e}}}$$

3–b)

Initialisation . On sait que $-2 < \alpha < -1$, donc $1 < -\alpha < 2$ d'où $u_0 + 1 < u_0 - \alpha < u_0 + 2$, soit $0 < u_0 - \alpha < 1$. D'autre part, $\dfrac{1}{\mathrm{e}^{2^0 - 1}} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^0} = 1$. On a bien $0 \le u_0 - \alpha \le \dfrac{1}{\mathrm{e}^{2^0 - 1}}$

L'inégalité $0 \le u_n - \alpha \le \dfrac{1}{\mathrm{e}^{2^n - 1}}$ est satisfaite au rang $n = 0$.

Hérédité

Supposons que pour un entier $n \ge 0$, on ait $0 \le u_n - \alpha \le \dfrac{1}{\mathrm{e}^{2^n - 1}}$. S'agissant d'une inégalité entre nombres positifs, on peut l'élever au carré : $0 \le (u_n - \alpha)^2 \le \left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^{2^n - 1}}\right)^2$, ce qui équivaut successivement à

$0 \le (u_n - \alpha)^2 \le \dfrac{1}{(\mathrm{e}^{2^n - 1})^2}$,

$0 \leq (u_n - \alpha)^2 \leq \dfrac{1}{e^{2(2^n-1)}}$, ou encore à

$0 \leq (u_n - \alpha)^2 \leq \dfrac{1}{e^{2^{n+1}-2}}$, puis à

$0 \leq \dfrac{(u_n - \alpha)^2}{e} \leq \dfrac{1}{e \times e^{2^{n+1}-2}}$ (**car** $\frac{1}{e} > 0$) et enfin à

$0 \leq \dfrac{(u_n - \alpha)^2}{e} \leq \dfrac{1}{e^{2^{n+1}-1}}$ **(***) ; nous n'avons pas oublié que** $(e^x)^y = e^{xy}$ **et** $e^x \times e^y = e^{x+y}$

Or on sait que $0 \leq u_{n+1} - \alpha \leq \dfrac{(u_n - \alpha)^2}{e}$ **(****)**, donc en comparant **(***)** et **(****)**, on obtient

$0 \leq u_{n+1} - \alpha \leq \dfrac{1}{e^{2^{n+1}-1}}$. **C'est l'inégalité attendue au rang** $n+1$. La propriété est héréditaire.

$$\boxed{\text{Par principe du raisonnement par récurrence, } \forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n - \alpha \leq \dfrac{1}{e^{2^n-1}}}$$

4)

Si $\dfrac{1}{e^{2^n-1}} \leq 10^{-p}$, alors l'inégalité du **3**– **b)** donnera $0 \leq u_n - \alpha \leq 10^{-p}$

Résolvons l'inéquation $\dfrac{1}{e^{2^n-1}} \leq 10^{-p}$. Elle équivaut successivement à :

$10^p \leq e^{2^n-1}$, puis à $2^n - 1 \geq p \ln 10$ (car la fonction $\ln$ est strictement croissante), puis à

$2^n \geq 1 + p \ln 10 =$ et enfin à $\boxed{n \ln 2 \geq \ln\Big(1 + p\ln(10)\Big)}$

On prendra n égal à 1+ la partie entière de $\ln\Big(1 + p\ln(10)\Big)$ notée trunc en langage Pascal, c'est-à-dire $n =$ 1+ trunc($\ln(1 + p\ln(10))$) On utilisera bien-sûr la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n - \dfrac{f(u_n)}{f'(u_n)} = u_n - \dfrac{u_n + 1 + 2e^{u_n}}{1 + 2e^{u_n}}$

```
PROGRAM ECRICOME2006 :
var u : real ; k, n : integer ;
BEGIN
n := 1+ trunc(ln(1 + p ln(10)));
u := −1 ;
for k := 1 to n do
u := u-(u+1+2*exp(u))/1+2*exp(u)) ;
writeln('u = ,' u : 2 : p) ;
END.
```

Le programme a tourné avec $p = 8$, on avait alors $n = 9$ et on a obtenu pour valeur approchée de α : -1.46305 (Turbo-Pascal version 7)

Remarque : On peut aussi inclure dans ce programme la recherche informatique de n, par une boucle.

DEUXIEME EXERCICE

1)

$\forall x > 0, \forall n \in \mathbb{N},\ x^{n+2}\exp(-\frac{x^2}{2}) > 0$. Posons $t = \frac{x^2}{2}$, on a $x > 0$, donc $x = \sqrt{2}t^{\frac{1}{2}}$

$x^{n+2} = (\sqrt{2}t^{\frac{1}{2}})^{n+2} = (\sqrt{2})^{n+2} \times t^{\frac{n+2}{2}}$. Il s'ensuit que

$x^{n+2}\exp(-\frac{x^2}{2}) = (\sqrt{2})^{n+2}t^{\frac{n+2}{2}}\exp(-t)$. On a $t \to +\infty$ lorsque $x \to +\infty$, donc

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^{n+2}\exp(-\frac{x^2}{2}) = \lim\limits_{t\to+\infty}(\sqrt{2})^{n+2}t^{\frac{n+2}{2}}\exp(-t) = 0$ par croissances comparées (rappelons que $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{t^a}{\exp(t)} = 0$)

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{n+2}\exp(-\frac{x^2}{2}) = 0$ ce qui s'écrit aussi $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2x^n\exp(-\frac{x^2}{2}) = 0$, donc

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n\exp(-\frac{x^2}{2})}{\frac{1}{x^2}} = 0 \text{ et cela exprime que } x^n\exp(-\frac{x^2}{2}) \underset{(+\infty)}{=} \circ\left(\frac{1}{x^2}\right)}$$

2)

Du résultat précédent on déduit :

$\exists\, A > 0\ /\ \forall x \geq A,\ 0 \leq x^{n+2}\exp(-\frac{x^2}{2}) \leq 1$ et en divisant les termes de cet encadrement par x^2 (qui est strictement positif puisque $x \geq A > 0$), on obtient :

$$\forall x \geq A,\ 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{x^2}$$

Remarquons que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ puisque $x \mapsto -\frac{x^2}{2}$ est continue et à valeurs dans $\mathbb{R}$ et l'exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$, donc $x \mapsto \exp(-\frac{x^2}{2})$ est continue sur $\mathbb{R}$. Il en résulte immédiatement que f est le produit de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ donc elle est continue sur $\mathbb{R}$ et a fortiori sur $\mathbb{R}^+$

L'intégrale $\int_A^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ est convergente d'après le critère de Riemann car $2 > 1$. **Par le théorème de comparaison des fonctions continues positives,** on conclut que l'intégrale $\int_A^{+\infty} f_n(x)dx$ est convergente. Sur l'intervalle $[0, A]$, f_n est continue, donc l'intégrale $\int_0^A f_n(x)dx$ existe et par conséquent

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty} f_n(x)dx \text{ est convergente.}}$$

3–a)

Soit $A > 0$. Posons $I_{n+2}(A) = \int_0^A x^{n+2}\exp(-\frac{x^2}{2})dx$.

Soit $u(x) = x^{n+1}$; $u'(x) = (n+1)x^n$; $v'(x) = x\exp(-\frac{x^2}{2})$; $v(x) = -\exp(-\frac{x^2}{2})$. Les fonctions u et v sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}^+$ (cela se démontre comme la continuité de f au **2)** et on peut intégrer par parties.

$$\begin{aligned}\int_0^A x^{n+2}\exp(-\frac{x^2}{2})dx &= \big[-x^{n+1}\exp(-\frac{x^2}{2})\big]_0^A + (n+1)\int_0^A x^n\exp(-\frac{x^2}{2})dx \\ &= -A^{n+1}\exp(-\frac{A^2}{2}) + (n+1)\int_0^A x^n\exp(-\frac{x^2}{2})dx\end{aligned}$$

$\lim_{A\to+\infty} I_{n+2}(A) = I_{n+2}$ puisque l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^{n+2}\exp(-\frac{x^2}{2})dx$ converge. De même $\lim_{A\to+\infty} I_n(A) = I_n$. D'autre part, $\lim_{A\to+\infty} A^{n+1}\exp(-\frac{A^2}{2}) = 0$ (cela se démontre comme au **1)**.

En passant à la limite dans l'égalité précédente qui s'écrit :

$I_{n+2}(A) = -A^{n+1}\exp(-\frac{A^2}{2}) + (n+1)\int_0^A x^n\exp(-\frac{x^2}{2})dx = -A^{n+1}\exp(-\frac{A^2}{2}) + (n+1)I_n(A)$,

on obtient

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+2} = (n+1)I_n}$$

3–b)

$I_0 = \int_0^{+\infty} \exp(-\frac{x^2}{2})dx$. Si l'on considère une variable aléatoire X qui suit la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, une densité de X est la fonction φ définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{x^2}{2})$ et par définition d'une densité on a : $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-\frac{x^2}{2})dx = 1$. Or la fontion $x \mapsto \exp(-\frac{x^2}{2})$ est manifestement paire, donc $\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-\frac{x^2}{2})dx = 2\int_0^{+\infty}\exp(-\frac{x^2}{2})dx$.

Il en résulte que $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}\exp(-\frac{x^2}{2})dx = \frac{1}{2}$

$$\boxed{I_0 = \int_0^{+\infty}\exp(-\frac{x^2}{2})dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = \sqrt{\frac{2\pi}{4}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}}$$

3–c)

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}dx = \lim_{B\to+\infty}\int_0^B x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}dx \\ &= \lim_{B\to+\infty}\left[-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\right]_0^B = \lim_{B\to+\infty}\left(-\mathrm{e}^{-\frac{B^2}{2}}+1\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{I_1 = 1 \text{ puisque } \lim_{B\to+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{B^2}{2}} = 0}$$

3–d)

Cas de I_{2n}. Nous procéderons par récurrence.

- **Initialisation : pour** $n = 0$

$I_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{0!}{2^0.0!}$. L'égalité a bien lieu.

- **Hérédité** Supposons que pour un entier $n \geq 0$, on ait $I_{2n} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{(2n)!}{2^n n!}$. D'après la relation **3–a)** $I_{2(n+1)} = I_{2n+2} = (2n+1)I_{2n}$ (on a remplacé n par $2n$). Donc, d'après l'hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned} I_{2(n+1)} &= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{(2n)!}{2^n n!}\times(2n+1) \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{(2n)!(2n+1)(2n+2)}{2^n n! 2(n+1)} \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{(2(n+1))!}{2^{n+1}(n+1)!} \end{aligned}$$

C'est l'égalité attendue au rang $n+1$: La propriété est héréditaire et

$$\boxed{\text{Par principe du raisonnement par récurrence, } \forall n \in \mathbb{N},\ I_{2n} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{(2n)!}{2^n n!}}$$

Cas de I_{2n+1}**.** La démarche est identique. Donnons-en une justification abrégée.

- **Initialisation : pour** $n = 0$

$I_1 = 1 = 2^0 0!$. L'égalité a bien lieu.

- **Hérédité** Si pour un entier $n \geq 0$, on a $I_{2n+1} = 2^n n!$, alors

$$\begin{aligned} I_{2(n+1)+1} &= I_{2n+3} = I_{(2n+1)+2} \\ &= (2n+2)I_{2n+1} \qquad \text{d'après } \mathbf{3\text{–}a)} \\ &= 2^n n!.2(n+1) = 2^{n+1}(n+1)! \end{aligned}$$

D'où $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ I_{2n+1} = 2^n n!}$

4–a)

On a vu au **2)** que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n était continue sur $\mathbb{R}^+$; f_1 est donc continue sur $\mathbb{R}^+$. Ceci prouve que f est continue sur $\mathbb{R}^{*+}$ (et continue en 0 à droite). L'application $x \mapsto x$ est continue sur $\mathbb{R}^{*-}$, donc f est continue sur $\mathbb{R}^{*-}$

(i) $\qquad f$ est continue sur $\mathbb{R}^*$

$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f_1(x) \geq 0$ (propriété de l'exponentielle), donc

(ii) $\qquad \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 0$

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ se réduit à $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_1(x)dx = I_1$. On sait d'après **3–c)** que cette intégrale vaut 1, donc

(iii) $\qquad \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

$$\boxed{\text{D'après les points } \mathbf{(i), (ii), (iii)}\ f \text{ est une densité de probabilité}}$$

4–b)

(I) $E(X)$ existe si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ est (absolument) convergente. Or cette intégrale se réduit à $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$ puisque sur $\mathbb{R}^{*-}$, $f(x) = 0$. La quantité $x^2\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ étant ≥ 0 sur $\mathbb{R}^+$, la convergence de l'intégrale suffit. Or $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = I_2$ et cette intégrale est convergente d'après **2)**.

$$\boxed{E(X) \text{ existe et } E(X) = I_2 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{2!}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{ d'après } \mathbf{3\text{–}d)}}$$

(II) $V(X)$ existe si et seulement si $E(X)$ existe (et c'est le cas) et $E(X^2)$ existe. L'existence de $E(X^2)$ se justifie comme celle de $E(X)$ et $E(X^2) = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^3\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = I_3$; donc $E(X^2) = 2^1 1! = 3$ d'après **3–d)**. Donc, d'après la formule de Koenig-Huyghens, $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 2 - \frac{\pi}{2}$,

$$\boxed{V(X) = \frac{4-\pi}{2}}$$

5–a)

$\forall x \in \mathbb{R},\ G(x) = P(Y \leq x) = P(X^2 \leq x)$.

- Si $x < 0$, l'événement $(X^2 \leq x < 0) = \emptyset$, donc $G(x) = 0$.
- Si $x \geq 0$, $P(X^2 \leq x) = P(|X| \leq \sqrt{x}) = P(-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x}) = F(\sqrt{x}) - F(-\sqrt{x})$.

Pour les lecteurs qui ne sauraient pas d'où vient cette relation, rappelons :
$P(-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x}) = \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(t)dt = \int_{-\infty}^{\sqrt{x}} f(t)dt - \int_{-\infty}^{-\sqrt{x}} f(t)dt$ d'après la relation de Chasles sur les intégrales convergentes ; ce qui donne le résultat par définition de la fonction de répartition d'une variable à densité.

Remarque : l'auteur de l'énoncé a sans doute voulu dire ‹‹ exprimer G à l'aide de F ›› car $G(x)$ ne s'exprime pas à l'aide de $F(x)$.

5–b)

Si $x \geq 0$, $G(x) = \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(t)dt = \int_{0}^{\sqrt{x}} f(t)dt$ puisque f est nulle sur $\mathbb{R}^-$, donc sur $[-\sqrt{x}, 0]$

$G(x) = \int_{0}^{+\infty} t\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} dt = \left[-\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\right]_0^{\sqrt{x}} = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$

$$\boxed{\text{Récapitulons : } G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}}$$

Y est donc une variable à densité puisque sa fonction de répartition est celle d'une variable qui suit la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$.

$$\boxed{Y \hookrightarrow \mathcal{E}(\tfrac{1}{2})\ ;\ E(Y) = 2 \text{ et } V(Y) = 4}$$

TROISIEME EXERCICE

3.1 Etude d'un endomorphisme de E

1)

Nous noterons P_k le polynôme $x \mapsto x^k$.

Soit $P \in E$,

. Si $P = (0)$ (polynôme nul), $P' = (0)$ et $Q = (0)$.

. Si $\deg P = 0$, $P' = (0)$ et $Q = P$.

. Si $\deg P \in \{1, 2\}$, $\deg P' \leq 1$, $\deg (X-1)P' \leq 2$, donc $\deg Q \leq 2$.

Dans tous les cas, Q appartient à E.

Soit $(T_1, T_2) \in E^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R},\ (f(\alpha T_1 + T_2))(x) &= (x-1)(\alpha T_1 + T_2)'(x) + (\alpha T_1 + T_2)(x) \\ &= \alpha\Big((x-1)T_1'(x) + T_1(x)\Big) + (x-1)T_2'(x) + T_2(x), \end{aligned}$$

en utilisant la linéarité de la dérivation et les règles de calculs élémentaires dans $\mathbb{R}$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\Big(f(\alpha T_1 + T_2)\Big)(x) = \Big(\alpha f(T_1) + f(T_2)\Big)(x)$, ce qui veut dire $f(\alpha T_1 + T_2) = \alpha f(T_1) + f(T_2)$.

$$\boxed{f \text{ est linéaire de } E \text{ dans } E : \text{c'est donc un endomorphisme de } E}$$

2)

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(P_0)(x) = P_0(x)$ car $P_0'(x) = 0$: $\boxed{f(P_0) = P_0}$

$\forall x \in \mathbb{R},\ (f(P_1))(x) = (x-1) + x = 2x - 1 = (2P_1 - P_0)(x)$: $\boxed{f(P_1) = -P_0 + 2P_1}$

$\forall x \in \mathbb{R},\ (f(P_2))(x) = (x-1) \times 2x + x^2 = 3x^2 - 2x = (3P_2 - 2P_1)(x)$: $\boxed{f(P_2) = -2P_1 + 3P_2}$

La matrice de f dans la base canonique de E, qui s'écrit en mettant en colonnes les coordonnées de $f(P_0), f(P_1)$ et $f(P_2)$, vaut donc :

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}$$

3)

La matrice A est triangulaire, ses valeurs propres sont les termes diagonaux.

$$\boxed{\operatorname{spect} A = \operatorname{spect} f = \{1, 2, 3\}}$$

$\operatorname{Card}(\operatorname{spect} f) = 3 = \dim E$ est une condition suffisante de diagonalisabilité :

$$\boxed{f \text{ est diagonalisable}}$$

L'endomorphisme f n'admet pas 0 pour valeur propre, f est injectif donc bijectif puisque c'est un endomorphisme d'un espace de dimension finie 3.

$$\boxed{f \text{ est un automorphisme de } E}$$

4)

$R_0 = P_0$; on sait donc déjà que $f(R_0) = R_0$: R_0 est donc un vecteur propre de f associé à la valeur propre 1 (n'oublions pas que R_0 n'est pas nul).

$R_1 = -P_0 + P_1$; la liste de ses coordonnées dans la base canonique de E est $(-1, 1, 0)$; les coordonnées de $f(R_1)$ sont données par $A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Il en résulte que $f(R_1) = 2R_1$: R_1 , qui n'est pas nul, est donc un vecteur propre de f associé à la valeur propre 2.

R_2 a pour coordonnées $(1, -2, 1)$ puisque $(x-1)^2 = 1 - 2x + x^2$. $A\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$: $f(R_2) = 3R_2$: R_2 , qui n'est pas nul, est donc un vecteur propre de f associé à la valeur propre 3.

On sait que lorsque, dans un espace de dimension n, un endomorphisme possède n valeurs propres distinctes, alors les sous-espaces propres sont de dimension 1. Les 3 sous-espaces propres $E_1(f), E_2(f), E_3(f)$ sont de dimension 1. Les trois vecteurs R_0 (resp R_1, R_2) constituent une base de $E_1(f)$ (resp $E_2(f)$, $E_3(f)$) et puisque f est diagonalisable , la famille (R_0, R_1, R_2) constitue une base de E .

$$\boxed{\mathcal{B}' = (R_0, R_1, R_2) \text{ est une base de } E \text{ formée de vecteurs propres de } f}$$

La matrice P de passage de la base canonique $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées de P_0, P_1 et P_2 dans $\mathcal{B}$:

$$\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

D'après les résultats du **4)**, $\boxed{D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}$

(On écrit en colonnes les coordonnées de $f(R_0), f(R_1)$ et $f(R_2)$ dans la base (R_0, R_1, R_2))

6)

Nous laissons le soin au lecteur de vérifier ces résultats, desquels on déduit : $\begin{cases} P_2 &= R_0 + 2R_1 + R_2 \\ P_1 &= R_0 + R_1 \end{cases}$

On sait déjà que $R_0 = P_0$. La matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$ est P^{-1} ; on peut l'obtenir en écrivant en colonnes les coordonnées de P_0, P_1 et P_2 dans la base $\mathcal{B}'$.

On trouve $\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$

7)

A^{-1} et D^{-1} sont les matrices de f^{-1} dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. La matrice P étant la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, on sait d'après la formule de changement de bases pour les endomorphismes que $D^{-1} = P^{-1}A^{-1}P$, relation équivalente à $A^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$ (obtenue en multipliant la première égalité à gauche par P et à droite par P^{-1}.)

Remarque : On aurait pu aussi partir de l'égalité $A = PDP^{-1}$, prendre l'inverse des deux membres (il n'y a aucun souci car toutes les matrices sont inversibles) :

$A^{-1} = (PDP^{-1})^{-1} = (P^{-1})^{-1}D^{-1}P^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$.

On demande une récurrence, faisons une récurrence.

Initialisation :

Posons $(A^{-1})^0 = (D^{-1})^0 = I$ (matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$). Il est clair que l'égalité est alors satisfaite ; elle l'est aussi pour $n = 1$

Hérédité : Supposons que l'égalité soit satisfaite pour un entier $n \geq 0$: on a $(A^{-1})^n = P(D^{-1})^nP^{-1}$

$$\begin{aligned} (A^{-1})^{n+1} &= (A^{-1})^n \times A \\ &= P(D^{-1})^nP^{-1}PD^{-1}P^{-1} \\ &\quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence et le cas } n = 1 \\ &= P(D^{-1})^{n+1}P^{-1} \end{aligned}$$

L'égalité est vérifiée au rang $n+1$ et par le principe du raisonnement par récurrence

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ (A^{-1})^n = P(D^{-1})^nP^{-1}}$$

Remarque : On pouvait aussi dire ceci :

$(A^{-1})^n$ et $(D^{-1})^n$ sont les matrices de $(f^{-1})^n$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$; la matrice de passage de est $\mathcal{B}$ à$\mathcal{B}'$ est P : d'après la formule de changement de base, on avait tout de suite le résultat.

On sait que $D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et $(D^{-1})^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{2})^n & 0 \\ 0 & 0 & (\frac{1}{3})^n \end{pmatrix}$

d'après des propriétés classiques sur les matrices diagonales et

$$(A^{-1})^n = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{2})^n & 0 \\ 0 & 0 & (\frac{1}{3})^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -(\frac{1}{2})^n & (\frac{1}{3})^n \\ 0 & (\frac{1}{2})^n & -2(\frac{1}{3})^n \\ 0 & 0 & (\frac{1}{3})^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La troisième colonne de la matrice $(A^{-1})^n$ est $\boxed{\begin{pmatrix} 1-2(\frac{1}{2})^n+(\frac{1}{3})^n \\ 2(\frac{1}{2})^n-2(\frac{1}{3})^n \\ (\frac{1}{3})^n \end{pmatrix}}$

3.2 Suite d'épreuves aléatoires

1)

Nous remarquons que si l'on tire la boule numéro 2 au premier tirage, on n'enlève aucune boule de l'urne ; on peut donc obtenir $X_2 = 0, 1$ ou 2. Utilisons alors le système complet d'événements $((X_1 = 0), (X_1 = 1), (X_1 = 2))$. **D'après la formule des probabilités totales,**

$$P(X_2 = 0) = P(X_1 = 0)P_{X_1=0}(X_2 = 0) + P(X_1 = 1)P_{X_1=1}(X_2 = 0) + P(X_1 = 2)P_{X_1=2}(X_2 = 0)$$

- Si $(X_1 = 0)$ est réalisé, l'urne, avant le deuxième tirage, ne contient que la boule numéro 0 ; donc $P_{X_1=0}(X_2 = 0) = 1$
- Si $(X_1 = 1)$ est réalisé, l'urne, avant le deuxième tirage, contient les boules numéros 0 et 1 ; donc $P_{X_1=0}(X_2 = 0) = \frac{1}{2}$
- Si $(X_1 = 2)$ est réalisé, l'urne, avant le deuxième tirage, contient les 3 boules donc $P_{X_1=2}(X_2 = 0) = \frac{1}{3}$

D'autre part, $P(X_1 = k) = \frac{1}{3}$ pour $k = 0, 1, 2$

Finalement, on obtient $P(X_2 = 0) = \frac{1}{3}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}) = \frac{11}{18}$

Pour le calcul de $P(X_2 = 1)$, c'est le même principe, on a

$$P(X_2 = 1) = P(X_1 = 0)P_{X_1=0}(X_2 = 1) + P(X_1 = 1)P_{X_1=1}(X_2 = 1) + P(X_1 = 2)P_{X_1=2}(X_2 = 1)$$

- $P_{X_1=0}(X_2 = 1) = 0$ car si $(X_1 = 1)$ est réalisé, l'urne, à l'issue du premier tirage, ne contient plus la boule numéro 1.
- $P_{X_1=1}(X_2 = 1) = \frac{1}{2}$ car si $(X_1 = 1)$ est réalisé, l'urne, à l'issue du premier tirage, ne contient que les boules numéros 0 et 1.
- $P_{X_1=2}(X_2 = 1) = \frac{1}{3}$ car si $(X_1 = 2)$ est réalisé, l'urne, à l'issue du premier tirage, contient les 3 boules.

Finalement, on obtient $P(X_2 = 1) = \frac{1}{3}(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) = \frac{5}{18}$

On sait que les événements $(X_2 = 0), (X_2 = 1), (X_2 = 2)$ forment un système complet, donc $P(X_2 = 2) = 1 - P(X_2 = 0) - P(X_2 = 1) = \frac{2}{18}$. Récapitulons :

k	0	1	2
$P(X = k)$	$\frac{11}{18}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{2}{18}$

$$\begin{aligned}
E(X_2) &= \frac{1}{18}(1\times 5+2\times 2) = \boxed{\frac{1}{2}}\\
E(X_2^2) &= \frac{1}{18}(1\times 5+4\times 2) = \boxed{\frac{13}{18}}\\
V(X_2) &= E(X_2^2)-(E(X_2))^2 = \frac{13}{18}-\frac{1}{4} = \boxed{\frac{17}{36}}
\end{aligned}$$

2)

Remarquons que si aux rangs $1, 2, \ldots, k$ on tire toujours la boule numéro 2, alors à l'issue du k ème tirage, l'urne contiendra les trois boules, donc X_k peut prendre les valeurs $0, 1, 2$.

Utilisons le système complet d'événements $((X_k = 0), (X_k = 1), (X_k = 2))$ pour $k \geq 1$. Les raisonnements et les calculs se font **exactement** de la même façon qu'au **1)** : on remplace dans la formule des probabilités totales 1 par k et 2 par $k+1$. On obtient les résultats suivants :

$P_{X_k=0}(X_{k+1}=0) = 1;\quad P_{X_k=1}(X_{k+1}=0) = \frac{1}{2};\quad P_{X_k=2}(X_{k+1}=0) = \frac{1}{3}$

$P_{X_k=0}(X_{k+1}=1) = 0;\quad P_{X_k=1}(X_{k+1}=1) = \frac{1}{2};\quad P_{X_k=2}(X_{k+1}=1) = \frac{1}{3}$

$P_{X_k=0}(X_{k+1}=2) = 0;\quad P_{X_k=1}(X_{k+1}=2) = 0;\quad P_{X_k=2}(X_{k+1}=2) = \frac{1}{3}$

En repportant ces résultats dans la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned}
P(X_{k+1}=0) &= P(X_k=0)+\frac{1}{2}P(X_k=1)+\frac{1}{3}P(X_k=2)\\
P(X_{k+1}=1) &= \frac{1}{2}P(X_k=1)+\frac{1}{3}P(X_k=2)\\
P(X_{k+1}=2) &= \frac{1}{3}P(X_k=2)
\end{aligned}$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} P(X_{k+1}=0)\\ P(X_{k+1}=1)\\ P(X_{k+1}=2)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} P(X_k=0)\\ P(X_k=1)\\ P(X_k=2)\end{pmatrix}$$

On vérifie que $A\times\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\end{pmatrix} = I$; on peut alors écrire : $\forall k\geq 1,\ U_{k+1} = A^{-1}U_k$

Pour $k=0$, $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix} = U_1$ d'après les calculs effectués dans **1)**

$$\boxed{\text{Conclusion : } \forall k\in\mathbb{N},\ U_{k+1} = A^{-1}U_k}$$

3)

On démontre alors facilement par récurrence (et nous laissons ce petit travail au lecteur) que

$$\boxed{\forall k\in\mathbb{N},\ U_k = (A^{-1})^k U_0}$$

4)

L'égalité précédente s'écrit aussi : $\begin{pmatrix} P(X_k=0)\\ P(X_k=1)\\ P(X_k=2)\end{pmatrix} = (A^{-1})^k\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. Ce produit est en fait, d'après les règles de calcul du produit matriciel, la troisième colonne de la matrice $(A^{-1})^k$ et le résultat a été donné au **3.1–7)** avec n au lieu de k. On peut donc conclure :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} P(X_k = 0) & = 1 - 2(\frac{1}{2})^k + (\frac{1}{3})^k \\ P(X_k = 1) & = 2(\frac{1}{2})^k - 2(\frac{1}{3})^k \\ P(X_k = 2) & = (\frac{1}{3})^k \end{cases}}$$

$\left|\frac{1}{2}\right| < 1$ et $\left|\frac{1}{3}\right| < 1 \Longrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{k \to +\infty} (\frac{1}{2})^k = 0 \\ \lim\limits_{k \to +\infty} (\frac{1}{3})^k = 0 \end{cases}$ Donc

$$\boxed{\lim_{k \to +\infty} P(X_k = 0) = 1 \ ; \lim_{k \to +\infty} P(X_k = 1) = \lim_{k \to +\infty} P(X_k = 2) = 0}$$