ECRI COME

Banque d'épreuves communes
aux concours des Ecoles
esc bordeaux / esc marseille / icn nancy / esc reims / esc rouen / esc toulouse

CONCOURS D'ADMISSION

option economique

MATHÉMATIQUES

Année 2006

Aucun instrument de calcul n'est autorisé.
Aucun document n'est autorisé.

L'énoncé comporte 5 pages

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

Tournez la page
S.V.P

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

EXERCICE 1

. On considère la fonction f définie pour tout réel x par :

$$.f(x) = x + 1 + 2e^x$$

ainsi que la fonction g des deux variables réelles x et y définie par :

$$g(x, y) = e^x \left(x + y^2 + e^x\right)$$

1. Recherche d'extremum local de g.

1. Etudier les variations de f et donner les limites de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ et $-\infty$.
2. Justifier l'existence d'une asymptote oblique au voisinage de $-\infty$ et donner la position de la courbe représentative de f par rapport à cette asymptote.
3. Déduire des variations de f l'existence d'un unique réel α, élément de l'intervalle $[-2, -1]$ tel que $f(\alpha) = 0$. (on rappelle que $e \simeq 2,7$)
4. Déterminer le seul point critique de g, c'est-à-dire le seul couple de $\mathbb{R}^2$, en lequel g est susceptible de présenter un extremum.
5. Vérifier que g présente un extremum relatif β en ce point. Est-ce un maximum ou un minimum ?
6. Montrer que l'on a :
$$4\beta + \alpha^2 - 1 = 0$$

2. Etude d'une suite réelle.

On s'intéresse à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par son premier terme $u_0 = -1$ et par la relation

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$$

1. Prouver que f est convexe sur $\mathbb{R}$. En déduire que que pour tous réels x et t :
$$f(x) + (t - x) f'(x) \leqslant f(t)$$
2. En déduire l'inégalité suivante :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \alpha \leqslant u_{n+1}$$
Puis que pour tout entier naturel n. :
$$\alpha \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant -1$$
En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers un réel à préciser
3. On admet que pour tout x de l'intervalle$[-2, -1]$:
$$0 \leqslant (x - \alpha) f'(x) - f(x) \leqslant \frac{(x - \alpha)^2}{e}$$
   (a) Prouver alors que pour tout entier naturel n :
$$0 \leqslant u_{n+1} - \alpha \leqslant \frac{(u_n - \alpha)^2}{e}$$
   (b) Puis démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :
$$0 \leqslant u_n - \alpha \leqslant \frac{1}{e^{2^n} - 1}$$
4. Écrire un programme en langage Pascal permettant, lorsque l'entier naturel p est donné par l'utilisateur, de calculer une valeur approchée de α, de telle sorte que l'on ait :
$$0 \leqslant u_n - \alpha \leqslant 10^{-p}$$

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

EXERCICE 2

Pour tout entier naturel n, on définit la fonction f_n de la variable réelle x par :

$$f_n(x) = x^n \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

1. Justifier que $f_n(x)$ est négligeable devant $\dfrac{1}{x^2}$ au voisinage de $+\infty$.

2. Prouver la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx$

3. O pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx$

   (a) A l'aide d'une intégration par parties portant sur des intégrales définies sur le segment $[0, A]$ avec $A \geqslant 0$, prouver que pour tout entier naturel n :

   $$I_{n+2} = (n+1)\,I_n$$

   (b) En utilisant la loi normale centrée réduite, justifier que :

   $$I_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

   (c) Donner la valeur de I_1

   (d) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

   $$\begin{aligned} I_{2n} &= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{(2n)!}{2^n n!} \\ I_{2n+1} &= 2^n n! \end{aligned}$$

4. Soit f la fonction définie pour tout réel x par :

   $$\begin{cases} f(x) = f_1(x) & \text{si } x \geqslant 0 \\ f(x) = 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

   (a) Démontrer que f est une densité de probabilité.

   (b) Soit X une variable aléatoire réelle qui admet f pour densité de probabilité.

      i. Justifier que X admet une espérance $E(X)$, et préciser sa valeur

      ii. Justifier que X admet une variance $V(X)$, et préciser sa valeur.

5. On désigne par F et G les fonctions de répartitions respectives de X et de $Y = X^2$

   (a) Exprimer $G(x)$ en fonction de $F(x)$ en distinguant les deux cas : $x < 0$ et $x \geqslant 0$

   (b) En déduire que Y est une variable à densité. Reconnaître la loi de Y et donner la valeur de $E(Y)$ et $V(Y)$

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

EXERCICE 3

E désigne l'espace des fonctions polynômes à coefficients réels, dont le degré est inférieur ou égal à l'entier naturel 2.

1. Etude d'un endomorphisme de E.

On considère l'application f qui, à tout élément P de E, associe la fonction polynôme Q telle que :

$$\text{pour tout } x \text{ réel :} \qquad Q(x) = (x-1)P'(x) + P(x)$$

et $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2)$ la base canonique de E définie par :

$$\text{pour tout réel } x : \qquad P_0(x) = 1,\ P_1(x) = x \text{ et } P_2(x) = x^2$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. Vérifier que la matrice A de f dans $\mathcal{B}$, s'écrit sous la forme :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$
3. Quelles sont les valeurs propres de f ? f est-il diagonalisable ? f est-il un automorphisme de E ?
4. Déterminer l'image par f des fonctions polynômes R_0, R_1, R_2 définies par :
$$\text{pour tout réel } x : \qquad R_0(x) = 1, \quad R_1(x) = x - 1 \text{ et } R_2(x) = (x-1)^2$$
5. Montrer que $\mathcal{B}' = (R_0, R_1, R_2)$ est une base de vecteurs propres de f. Écrire la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ ainsi que la matrice D de f dans la base $\mathcal{B}'$.
6. Vérifier que pour tout réel x :
$$\begin{cases} R_2 x + 2R_1(x) + R_0(x) = P_2(x) \\ R_1(x) + R_0(x) = P_1(x) \end{cases}$$
En déduire la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$
7. Écrire A^{-1} en fonction de D^{-1}. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :
$$\left[A^{-1}\right]^n = P\left[D^{-1}\right]^n P^{-1}$$
et expliciter la troisième colonne de la matrice $\left[A^{-1}\right]^n$

2. Suite d'épreuves aléatoires.

On dispose d'une urne qui contient trois boules numérotées de 0 à 2.
On s'intéresse à une suite d'épreuves définies de la manière suivante :

- La première épreuve consiste à choisir au hasard une boule dans cette urne.
- Si j est le numéro de la boule tirée, on enlève de l'urne toutes les boules dont le numéro est strictement supérieur à j, le tirage suivant se faisant alors dans l'urne ne contenant plus que les boules numérotées de 0 à j.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

On considère alors la variable aléatoire réelle X_k égale au numéro de la boule obtenue à la $k^{ème}$ épreuve ($k \geqslant 0$)
On note alors U_k la matrice unicolonne définie par :

$$U_k = \begin{pmatrix} P[X_k = 0] \\ P[X_k = 1] \\ P[X_k = 2] \end{pmatrix}$$

où $P[X_k = j]$ est la probabilité de tirer la boule numéro j à la $k^{ème}$ épreuve.
On convient de définir la matrice U_0 par :

$$U_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer la loi de X_2 (On pourra s'aider d'un arbre). Calculer l'espérance et la variance de X_2
2. Par utilisation de la formule des probabilités totales, prouver que pour tout entier naturel k :

$$U_{k+1} = A^{-1}U_k$$

3. Écrire U_k en fonction de A^{-1} et U_0
4. Pour tout k de $\mathbb{N}$, donner la loi de X_k et vérifier que l'on a :

$$\lim_{k\to+\infty} P[X_k = 0] = 1, \quad \lim_{k\to+\infty} P[X_k = 1] = 0, \quad \lim_{k\to+\infty} P[X_k = 2] = 0$$

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

ANNALES DE MATHEMATIQUES 2006

ECRICOME VOIE E 2006

CORRIGE

PREMIER EXERCICE

1.1 Recherche d'un extremum local de g

1)

La fonction f est définie, continue, dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions continues, dérivables sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 1 + 2\mathrm{e}^x}$$

$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x > 0 \Longrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) > 0$. On a le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Explication des limites :

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1) = \lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x = +\infty \Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

2)

Remarquons que $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-(x+1)) = \lim\limits_{x\to-\infty} 2\mathrm{e}^x = 0$. La droite d'équation $y = x+1$ est asymptote à la courbe C_f représentative de f en $-\infty$. De plus $f(x) - (x+1) = 2\mathrm{e}^x > 0$: la courbe C_f est au dessus de son asymptote.

3)

La fonction est continue sur $\mathbb{R}$, strictement croissante sur $\mathbb{R}$, c'est donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur son image qui est l'intervalle $]-\infty,+\infty[= \mathbb{R}$ d'après le tableau de variations .

$\forall y \in \mathbb{R},\ \exists !x \in \mathbb{R}\ /\ y = f(x)$; en particulier pour $y = 0$.

$$\boxed{\text{Il existe un unique réel } \alpha \text{ tel que } f(\alpha) = 0}$$

De plus, $f(-2) = -1 + 2\mathrm{e}^{-2} = -1 + \dfrac{2}{\mathrm{e}^2}$.

$\mathrm{e} > 2 \Longrightarrow \mathrm{e}^2 > 4 > 0$, donc $\dfrac{1}{\mathrm{e}^2} < \dfrac{1}{4}$ **puisqu'il s'agissait d'une inégalité entre nombres strictement positifs**. On a donc $-1 + \dfrac{2}{\mathrm{e}^2} < -1 + \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2} < 0$.

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autrement que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Conclusion : $f(-2) < 0$.

$f(-1) = \frac{2}{\mathrm{e}} > 0$. Sur l'intervalle $[-2, -1]$, la fonction f change de signe, donc elle s'annule (puisqu'elle est continue) : $\boxed{\alpha \in]-2, -1[}$

4)

L'application $(x, y) \mapsto x$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ en tant que fonction polynomiale et à valeurs dans $\mathbb{R}$; $t \mapsto \mathrm{e}^t$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, donc par composition, $(x, y) \mapsto \mathrm{e}^x$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

L'application $(x, y) \mapsto x + y^2$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ (fonction polynomiale).

Donc l'application $(x, y) \mapsto x + y^2 + \mathrm{e}^x$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ comme somme de fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

L'application $g : (x, y) \mapsto (x + y^2 + \mathrm{e}^x)\mathrm{e}^x$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ comme produit. On en déduit que g admet des dérivées partielles d'ordre 1 sur $\mathbb{R}^2$ (puisque g est **a fortiori** de classe C^1). $\mathbb{R}^2$ étant une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$, g ne peut admettre un extremum qu'en un point critique.

- **Recherche des points critiques**

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x}(x, y) &= 0 \\ \dfrac{\partial g}{\partial y}(x, y) &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \mathrm{e}^x(x + y^2 + \mathrm{e}^x) + \mathrm{e}^x(1 + \mathrm{e}^x) &= 0 \\ 2y\mathrm{e}^x &= 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \mathrm{e}^x(1 + x + y^2 + 2\mathrm{e}^x) &= 0 \\ y &= 0 \end{cases} \quad \text{car } \forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x \neq 0$$

$$\iff \begin{cases} 1 + x + y^2 + 2\mathrm{e}^x &= 0 \\ y &= 0 \end{cases} \quad \text{car } \forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x \neq 0$$

$$\iff \begin{cases} f(x) &= 0 \\ y &= 0 \end{cases} \quad \text{puisque } y = 0$$

$$\iff \begin{cases} x &= \alpha \\ y &= 0 \end{cases} \quad \text{d'après la question } \mathbf{3)}$$

$\boxed{\text{La fonction } g \text{ admet un seul point critique : } (\alpha, 0)}$

5)

La fonction g étant de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, elle admet des dérivées partielles d'ordre 2 continues sur $\mathbb{R}^2$. On peut donc appliquer à g le théorème de Schwarz, c'est-à-dire ,

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(x, y) = s(x, y)$$

.

Utilisons les notations de Monge ; $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) = r(x, y) &= \mathrm{e}^x(1 + x + y^2 + 2\mathrm{e}^x) + \mathrm{e}^x(1 + 2\mathrm{e}^x) \\ &= \mathrm{e}^x(2 + x + y^2 + 4\mathrm{e}^x) \\ \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = t(x, y) &= 2\mathrm{e}^x \\ s(x, y) &= 2y\mathrm{e}^x \end{aligned}$$

Au point $(\alpha, 0)$:

$$\begin{aligned} r(\alpha, 0) &= \mathrm{e}^\alpha(2 + \alpha + 4\mathrm{e}^\alpha) \\ t(\alpha, 0) &= 2\mathrm{e}^\alpha \\ s(\alpha, 0) &= 0 \end{aligned}$$

$(s^2 - rt)(\alpha, 0) = -2\mathrm{e}^{2\alpha}(2 + \alpha + 4\mathrm{e}^\alpha)$. On sait que $-2 < \alpha < 1$, donc $2 + \alpha > 0$ et par suite $2 + \alpha + 4\mathrm{e}^\alpha > 0$ puisque $4\mathrm{e}^{2\alpha} > 0$

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

$(s^2 - rt)(\alpha, 0) < 0$, donc g possède en ce point un extremum local. Or $r(\alpha, 0) = e^{\alpha}(2 + \alpha + 4e^{\alpha}) > 0$, donc cet extremum est un minimum local.

6)

La valeur de ce minimum est $\beta = g(\alpha, 0) = e^{\alpha}(\alpha + e^{\alpha})$. Or on sait que $f(\alpha) = 0$, ce qui donne $\alpha + 1 + 2e^{\alpha} = 0$, d'où l'on tire : $e^{\alpha} = -\frac{1}{2}(1 + \alpha)$. Ainsi on obtient

$$\begin{aligned}\beta &= -\frac{1}{2}(\alpha+1)(\alpha - \frac{1}{2}(\alpha+1)) \\ &= -\frac{1}{2}(\alpha+1)(\frac{\alpha-1}{2}) \\ &= -\frac{\alpha^2-1}{4}\end{aligned}$$

Cette dernière égalité équivaut à $\boxed{4\beta + \alpha^2 - 1 = 0}$

1.2 Etude d'une suite réelle

1)

$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = 2e^x > 0$, donc

La fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$

Cela signifie que la courbe C_f est au dessus de ses tangentes.
Soit $x \in \mathbb{R}$; la tangente au point d'abscisse x de la courbe C_f a pour équation : $y = f'(x)(t - x) + f(x)$; la variable étant ici t, la courbe C_f a pour équation $y = f(t)$.
La courbe C_f au dessus de ses tangentes s'exprime ainsi :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R},\ f(x) + (t - x)f'(x) \leq f(t)}$$

2)

Remplaçons dans l'inégalité précédente x par u_n et t par u_{n+1}. On obtient $f(u_n) + (u_{n+1} - u_n)f'(u_n) \leq f(u_{n+1})$.

Par définition de la suite (u_n), on a $u_{n+1} - u_n = -\dfrac{f(u_n)}{f'(u_n)}$; l'inégalité précédente s'écrit alors :

$f(u_n) - \dfrac{f(u_n)}{f'(u_n)}f'(u_n) \leq f(u_{n+1})$, c'est-à-dire $0 \leq f(u_{n+1})$. Or $f(\alpha) = 0$, donc on peut écrire $f(\alpha) \leq f(u_{n+1})$. L'application f étant **strictement** croissante sur $\mathbb{R}$, on en déduit $\boxed{\alpha \leq u_{n+1}}$

On vient de montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha \leq u_{n+1}$, ce qui peut s'écrire $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \alpha \leq u_n$ (il suffit de faire le changement d'indice $k = n + 1$). Mais $u_0 = -1$ et $\alpha < -1$ d'après la question **1–3)**, donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha \leq u_n}$$

- La fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$, donc $\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha \leq u_n \Longrightarrow 0 \leq f(u_n)$

Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ -\dfrac{f(u_n)}{f'(u_n)} \leq 0$ puisque $f' > 0$ sur $\mathbb{R}$. Conclusion $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n \leq 0$

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est décroissante}}$$

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

On a donc en particulier : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq u_0$, soit $u_n \leq -1$.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha \leq u_{n+1} \leq u_n \leq -1$$

La suite (u_n) est décroissante et minorée par α donc elle converge vers un réel $\ell \geq \alpha$

- Détermination de ℓ.

f et f' sont continues sur $\mathbb{R}$ (d'après la question **1–3)**, donc elles sont continues au point ℓ ; on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f'(u_n) = f'(\ell)$. De plus $f' > 0$ sur $\mathbb{R}$, donc $f'(\ell) \neq 0$ et on peut affirmer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{f(u_n)}{f'(u_n)} = \dfrac{f(\ell)}{f'(\ell)}$

Par passage à la limite, l'égalité $u_{n+1} - u_n = -\dfrac{f(u_n)}{f'(u_n)}$ donne $\ell - \ell = -\dfrac{f(\ell)}{f'(\ell)}$, soit $-f(\ell) = 0$.

$$\ell = \alpha$$

3–a)

Rappelons que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = -\dfrac{f(u_n)}{f'(u_n)}$, donc $u_{n+1} - \alpha = u_n - \alpha - \dfrac{f(u_n)}{f'(u_n)}$, soit encore

$$u_{n+1} - \alpha = \frac{(u_n - \alpha)f'(u_n) - f(u_n)}{f'(u_n)}$$

On a vu au **1–3–3)** et au **1–2–2)** que $-2 \leq \alpha \leq u_n < -1$, donc $u_n \in [-2, -1]$; on peut donc utiliser l'inégalité admise en y remplaçant x par u_n. On obtient alors

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq (u_n - \alpha)f'(u_n) - f(u_n) \leq \frac{(u_n - \alpha)^2}{\mathrm{e}} \qquad (*)$$

D'autre part, $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 1 + 2\mathrm{e}^x$, donc $f'(x) > 1$, ce qui équivaut à $0 < \dfrac{1}{f'(x)} < 1$. En particulier

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < \frac{1}{f'(u_n)} < 1 \qquad (**)$$

Multiplions membre à membre les inégalités **(*)** et **(**)**. On trouve

$0 \leq \dfrac{(u_n - \alpha)f'(u_n) - f(u_n)}{f'(u_n)} \leq \dfrac{(u_n - \alpha)^2}{\mathrm{e}}$, c'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_{n+1} - \alpha \leq \frac{(u_n - \alpha)^2}{\mathrm{e}}$$

3–b)

Initialisation . On sait que $-2 < \alpha < -1$, donc $1 < -\alpha < 2$ d'où $u_0 + 1 < u_0 - \alpha < u_0 + 2$, soit $0 < u_0 - \alpha < 1$. D'autre part, $\dfrac{1}{\mathrm{e}^{2^0-1}} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^0} = 1$. On a bien $0 \leq u_0 - \alpha \leq \dfrac{1}{\mathrm{e}^{2^0-1}}$

L'inégalité $0 \leq u_n - \alpha \leq \dfrac{1}{\mathrm{e}^{2^n-1}}$ est satisfaite au rang $n = 0$.

Hérédité

Supposons que pour un entier $n \geq 0$, on ait $0 \leq u_n - \alpha \leq \dfrac{1}{\mathrm{e}^{2^n-1}}$. S'agissant d'une inégalité entre nombres positifs, on peut l'élever au carré : $0 \leq (u_n - \alpha)^2 \leq \left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^{2^n-1}}\right)^2$, ce qui équivaut successivement à

$$0 \leq (u_n - \alpha)^2 \leq \frac{1}{(\mathrm{e}^{2^n-1})^2},$$

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

$0 \leq (u_n - \alpha)^2 \leq \frac{1}{e^{2(2^n-1)}}$, ou encore à

$0 \leq (u_n - \alpha)^2 \leq \frac{1}{e^{2^{n+1}-2}}$, puis à

$0 \leq \frac{(u_n-\alpha)^2}{e} \leq \frac{1}{e \times e^{2^{n+1}-2}}$ (**car** $\frac{1}{e} > 0$) et enfin à

$0 \leq \frac{(u_n-\alpha)^2}{e} \leq \frac{1}{e^{2^{n+1}-1}}$ **(***) ; nous n'avons pas oublié que** $(e^x)^y = e^{xy}$ **et** $e^x \times e^y = e^{x+y}$

Or on sait que $0 \leq u_{n+1} - \alpha \leq \frac{(u_n-\alpha)^2}{e}$ **(****)**, donc en comparant **(***)** et **(****)**, on obtient

$0 \leq u_{n+1} - \alpha \leq \frac{1}{e^{2^{n+1}-1}}$. **C'est l'inégalité attendue au rang** $n+1$. La propriété est héréditaire.

Par principe du raisonnement par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n - \alpha \leq \frac{1}{e^{2^n-1}}$

4)

Si $\frac{1}{e^{2^n-1}} \leq 10^{-p}$, alors l'inégalité du **3– b)** donnera $0 \leq u_n - \alpha \leq 10^{-p}$

Résolvons l'inéquation $\frac{1}{e^{2^n-1}} \leq 10^{-p}$. Elle équivaut successivement à :

$10^p \leq e^{2^n-1}$, puis à $2^n - 1 \geq p \ln 10$ (car la fonction ln est strictement croissante), puis à

$2^n \geq 1 + p \ln 10 =$ et enfin à $\boxed{n \ln 2 \geq \ln\left(1 + p \ln(10)\right)}$

On prendra n égal à 1+ la partie entière de $\ln\left(1 + p \ln(10)\right)$ notée trunc en langage Pascal, c'est-à-dire $n = 1+$ trunc$(\ln(1 + p \ln(10)))$ On utilisera bien-sûr la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)} = u_n - \frac{u_n + 1 + 2e^{u_n}}{1 + 2e^{u_n}}$

```
PROGRAM ECRICOME2006 :
var u : real ; k, n : integer ;
BEGIN
n  := 1+ trunc(ln(1 + p ln(10)));
u  := -1 ;
for k  := 1 to n do
u  := u-(u+1+2*exp(u))/1+2*exp(u)) ;
writeln('u = ,' u : 2 : p) ;
END.
```

Le programme a tourné avec $p = 8$, on avait alors $n = 9$ et on a obtenu pour valeur approchée de α : -1.46305 (Turbo-Pascal version 7)

Remarque : On peut aussi inclure dans ce programme la recherche informatique de n, par une boucle.

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

DEUXIEME EXERCICE

1)

$\forall x > 0, \forall n \in \mathbb{N},\ x^{n+2}\exp(-\frac{x^2}{2}) > 0$. Posons $t = \frac{x^2}{2}$, on a $x > 0$, donc $x = \sqrt{2}t^{\frac{1}{2}}$

$x^{n+2} = (\sqrt{2}t^{\frac{1}{2}})^{n+2} = (\sqrt{2})^{n+2} \times t^{\frac{n+2}{2}}$. Il s'ensuit que

$x^{n+2}\exp(-\frac{x^2}{2}) = (\sqrt{2})^{n+2}t^{\frac{n+2}{2}}\exp(-t)$. On a $t \to +\infty$ lorsque $x \to +\infty$, donc

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^{n+2}\exp(-\frac{x^2}{2}) = \lim\limits_{t\to+\infty}(\sqrt{2})^{n+2}t^{\frac{n+2}{2}}\exp(-t) = 0$ par croissances comparées (rappelons que $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{t^a}{\exp(t)} = 0$)

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{n+2}\exp(-\frac{x^2}{2}) = 0$ ce qui s'écrit aussi $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2x^n\exp(-\frac{x^2}{2}) = 0$, donc

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n\exp(-\frac{x^2}{2})}{\frac{1}{x^2}} = 0 \text{ et cela exprime que } x^n\exp(-\frac{x^2}{2}) \underset{(+\infty)}{=} \circ\Big(\frac{1}{x^2}\Big)$$

2)

Du résultat précédent on déduit :

$\exists\, A > 0\ /\ \forall x \geq A,\ 0 \leq x^{n+2}\exp(-\frac{x^2}{2}) \leq 1$ et en divisant les termes de cet encadrement par x^2 (qui est strictement positif puisque $x \geq A > 0$), on obtient :

$$\forall x \geq A,\ 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{x^2}$$

Remarquons que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ puisque $x \mapsto -\frac{x^2}{2}$ est continue et à valeurs dans $\mathbb{R}$ et l'exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$, donc $x \mapsto \exp(-\frac{x^2}{2})$ est continue sur $\mathbb{R}$. Il en résulte immédiatement que f est le produit de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ donc elle est continue sur $\mathbb{R}$ et a fortiori sur $\mathbb{R}^+$

L'intégrale $\int_A^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ est convergente d'après le critère de Riemann car $2 > 1$. **Par le théorème de comparaison des fonctions continues positives,** on conclut que l'intégrale $\int_A^{+\infty} f_n(x)dx$ est convergente. Sur l'intervalle $[0, A]$, f_n est continue, donc l'intégrale $\int_0^A f_n(x)dx$ existe et par conséquent

$$\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty} f_n(x)dx \text{ est convergente.}$$

3–a)

Soit $A > 0$. Posons $I_{n+2}(A) = \int_0^A x^{n+2}\exp(-\frac{x^2}{2})dx$.

Soit $u(x) = x^{n+1}$; $u'(x) = (n+1)x^n$; $v'(x) = x\exp(-\frac{x^2}{2})$; $v(x) = -\exp(-\frac{x^2}{2})$. Les fonctions u et v sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}^+$ (cela se démontre comme la continuité de f au **2)** et on peut intégrer par parties.

$$\begin{aligned}\int_0^A x^{n+2}\exp(-\frac{x^2}{2})dx &= \big[-x^{n+1}\exp(-\frac{x^2}{2})\big]_0^A + (n+1)\int_0^A x^n\exp(-\frac{x^2}{2})dx\\ &= -A^{n+1}\exp(-\frac{A^2}{2}) + (n+1)\int_0^A x^n\exp(-\frac{x^2}{2})dx\end{aligned}$$

 © EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

$\lim\limits_{A\to+\infty} I_{n+2}(A) = I_{n+2}$ puisque l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{n+2}\exp(-\frac{x^2}{2})dx$ converge. De même $\lim\limits_{A\to+\infty} I_n(A) = I_n$. D'autre part, $\lim\limits_{A\to+\infty} A^{n+1}\exp(-\frac{A^2}{2}) = 0$ (cela se démontre comme au **1)**.

En passant à la limite dans l'égalité précédente qui s'écrit :

$I_{n+2}(A) = -A^{n+1}\exp(-\frac{A^2}{2}) + (n+1)\displaystyle\int_0^A x^n\exp(-\frac{x^2}{2})dx = -A^{n+1}\exp(-\frac{A^2}{2}) + (n+1)I_n(A)$,

on obtient

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ I_{n+2} = (n+1)I_n}$$

3–b)

$I_0 = \displaystyle\int_0^{+\infty}\exp(-\frac{x^2}{2})dx$. Si l'on considère une variable aléatoire X qui suit la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, une densité de X est la fonction φ définie par : $\forall x\in\mathbb{R},\ \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{x^2}{2})$ et par définition d'une densité on a : $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-\frac{x^2}{2})dx = 1$. Or la fontion $x\mapsto\exp(-\frac{x^2}{2})$ est manifestement paire, donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-\frac{x^2}{2})dx = 2\int_0^{+\infty}\exp(-\frac{x^2}{2})dx$. Il en résulte que $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_0^{+\infty}\exp(-\frac{x^2}{2})dx = \frac{1}{2}$

$$\boxed{I_0 = \int_0^{+\infty}\exp(-\frac{x^2}{2})dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = \sqrt{\frac{2\pi}{4}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}}$$

3–c)

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}dx = \lim_{B\to+\infty}\int_0^B x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}dx \\ &= \lim_{B\to+\infty}\big[-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\big]_0^B = \lim_{B\to+\infty}\Big(-\mathrm{e}^{-\frac{B^2}{2}}+1\Big)\end{aligned}$$

$$\boxed{I_1 = 1 \text{ puisque } \lim_{B\to+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{B^2}{2}} = 0}$$

3–d)

Cas de I_{2n}. Nous procéderons par récurrence.

- **Initialisation : pour $n=0$**

$I_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{0!}{2^0.0!}$. L'égalité a bien lieu.

- **Hérédité** Supposons que pour un entier $n\geq 0$, on ait $I_{2n} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{(2n)!}{2^n n!}$. D'après la relation **3–a)** $I_{2(n+1)} = I_{2n+2} = (2n+1)I_{2n}$ (on a remplacé n par $2n$). Donc, d'après l'hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned} I_{2(n+1)} &= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{(2n)!}{2^n n!}\times(2n+1) \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{(2n)!(2n+1)(2n+2)}{2^n n!2(n+1)} \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{(2(n+1))!}{2^{n+1}(n+1)!}\end{aligned}$$

C'est l'égalité attendue au rang $n+1$: La propriété est héréditaire et

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Par principe du raisonnement par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{2n} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{(2n)!}{2^n n!}$

Cas de I_{2n+1}. La démarche est identique. Donnons-en une justification abrégée.

- **Initialisation : pour** $n = 0$

$I_1 = 1 = 2^0 0!$. L'égalité a bien lieu.

- **Hérédité** Si pour un entier $n \geq 0$, on a $I_{2n+1} = 2^n n!$, alors

$$\begin{aligned} I_{2(n+1)+1} &= I_{2n+3} = I_{(2n+1)+2} \\ &= (2n+2)I_{2n+1} \qquad \text{d'après } \mathbf{3\text{–}a)} \\ &= 2^n n!.2(n+1) = 2^{n+1}(n+1)! \end{aligned}$$

D'où $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ I_{2n+1} = 2^n n!}$

4–a)

On a vu au **2)** que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n était continue sur $\mathbb{R}^+$; f_1 est donc continue sur $\mathbb{R}^+$. Ceci prouve que f est continue sur $\mathbb{R}^{*+}$ (et continue en 0 à droite). L'application $x \mapsto x$ est continue sur $\mathbb{R}^{*-}$, donc f est continue sur $\mathbb{R}^{*-}$

(i) f est continue sur $\mathbb{R}^*$

$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f_1(x) \geq 0$ (propriété de l'exponentielle), donc

(ii) $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 0$

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ se réduit à $\int_0^{+\infty} f_1(x)dx = I_1$. On sait d'après **3–c)** que cette intégrale vaut 1, donc

(iii) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

D'après les points **(i), (ii) , (iii)** f est une densité de probabilité

4–b)

(I) $E(X)$ existe si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ est (absolument) convergente. Or cette intégrale se réduit à $\int_0^{+\infty} x^2 \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}dx$ puisque sur $\mathbb{R}^{*-}, f(x) = 0$. La quantité $x^2\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ étant ≥ 0 sur $\mathbb{R}^+$, la convergence de l'intégrale suffit. Or $\int_0^{+\infty} x^2\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}dx = I_2$ et cette intégrale est convergente d'après **2)**.

$E(X)$ existe et $E(X) = I_2 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{2!}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ d'après **3–d)**

(II) $V(X)$ existe si et seulement si $E(X)$ existe (et c'est le cas) et $E(X^2)$ existe. L'existence de $E(X^2)$ se justifie comme celle de $E(X)$ et $E(X^2) = \int_0^{+\infty} x^3\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}dx = I_3$; donc $E(X^2) = 2^1 1! = 3$ d'après **3–d)**. Donc, d'après la formule de Koenig-Huyghens, $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 2 - \frac{\pi}{2}$,

$$\boxed{V(X) = \frac{4-\pi}{2}}$$

5–a)

$\forall x \in \mathbb{R},\ G(x) = P(Y \leq x) = P(X^2 \leq x)$.

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

- Si $x < 0$, l'événement $(X^2 \leq x < 0) = \emptyset$, donc $G(x) = 0$.
- Si $x \geq 0$, $P(X^2 \leq x) = P(|X| \leq \sqrt{x}) = P(-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x}) = F(\sqrt{x}) - F(-\sqrt{x})$.

Pour les lecteurs qui ne sauraient pas d'où vient cette relation, rappelons :

$P(-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x}) = \displaystyle\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(t)dt = \int_{-\infty}^{\sqrt{x}} f(t)dt - \int_{-\infty}^{-\sqrt{x}} f(t)dt$ d'après la relation de Chasles sur les intégrales convergentes ; ce qui donne le résultat par définition de la fonction de répartition d'une variable à densité.

Remarque : l'auteur de l'énoncé a sans doute voulu dire ‹‹ exprimer G à l'aide de F ›› car $G(x)$ ne s'exprime pas à l'aide de $F(x)$.

5–b)

Si $x \geq 0$, $G(x) = \displaystyle\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(t)dt = \int_{0}^{\sqrt{x}} f(t)dt$ puisque f est nulle sur $\mathbb{R}^-$, donc sur $[-\sqrt{x}, 0]$

$G(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-\frac{t^2}{2}}dt = \Big[-e^{-\frac{t^2}{2}}\Big]_0^{\sqrt{x}} = 1 - e^{-\frac{x}{2}}$

Récapitulons : $G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\frac{x}{2}} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Y est donc une variable à densité puisque sa fonction de répartition est celle d'une variable qui suit la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$.

$Y \hookrightarrow \mathcal{E}(\frac{1}{2})$; $E(Y) = 2$ et $V(Y) = 4$

TROISIEME EXERCICE

3.1 Etude d'un endomorphisme de E

1)

Nous noterons P_k le polynôme $x \mapsto x^k$.

Soit $P \in E$,

. Si $P = (0)$ (polynôme nul), $P' = (0)$ et $Q = (0)$.

. Si $\deg P = 0$, $P' = (0)$ et $Q = P$.

. Si $\deg P \in \{1, 2\}$, $\deg P' \leq 1$, $\deg(X-1)P' \leq 2$, donc $\deg Q \leq 2$.

Dans tous les cas, Q appartient à E.

Soit $(T_1, T_2) \in E^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R},\ (f(\alpha T_1 + T_2))(x) &= (x-1)(\alpha T_1 + T_2)'(x) + (\alpha T_1 + T_2)(x) \\ &= \alpha\Big((x-1)T_1'(x) + T_1(x)\Big) + (x-1)T_2'(x) + T_2(x), \end{aligned}$$

en utilisant la linéarité de la dérivation et les règles de calculs élémentaires dans $\mathbb{R}$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\Big(f(\alpha T_1 + T_2)\Big)(x) = \Big(\alpha f(T_1) + f(T_2)\Big)(x)$, ce qui veut dire $f(\alpha T_1 + T_2) = \alpha f(T_1) + f(T_2)$.

f est linéaire de E dans E : c'est donc un endomorphisme de E

2)

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(P_0)(x) = P_0(x)$ car $P_0'(x) = 0$: $f(P_0) = P_0$

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

$\forall x \in \mathbb{R},\ (f(P_1))(x) = (x-1) + x = 2x - 1 = (2P_1 - P_0)(x)$: $\boxed{f(P_1) = -P_0 + 2P_1}$

$\forall x \in \mathbb{R},\ (f(P_2))(x) = (x-1) \times 2x + x^2 = 3x^2 - 2x = (3P_2 - 2P_1)(x)$: $\boxed{f(P_2) = -2P_1 + 3P_2}$

La matrice de f dans la base canonique de E, qui s'écrit en mettant en colonnes les coordonnées de $f(P_0), f(P_1)$ et $f(P_2)$, vaut donc :

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}$$

3)

La matrice A est triangulaire, ses valeurs propres sont les termes diagonaux.

$$\boxed{\text{spect}\, A = \text{spect}\, f = \{1, 2, 3\}}$$

$\text{Card}(\text{spect}\, f) = 3 = \dim E$ est une condition suffisante de diagonalisabilité :

$$\boxed{f \text{ est diagonalisable}}$$

L'endomorphisme f n'admet pas 0 pour valeur propre, f est injectif donc bijectif puisque c'est un endomorphisme d'un espace de dimension finie 3.

$$\boxed{f \text{ est un automorphisme de } E}$$

4)

$R_0 = P_0$; on sait donc déjà que $f(R_0) = R_0$: R_0 est donc un vecteur propre de f associé à la valeur propre 1 (n'oublions pas que R_0 n'est pas nul).

$R_1 = -P_0 + P_1$; la liste de ses coordonnées dans la base canonique de E est $(-1, 1, 0)$; les coordonnées de $f(R_1)$ sont données par $A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Il en résulte que $f(R_1) = 2R_1$: R_1 , qui n'est pas nul, est donc un vecteur propre de f associé à la valeur propre 2.

R_2 a pour coordonnées $(1, -2, 1)$ puisque $(x-1)^2 = 1 - 2x + x^2$. $A \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$: $f(R_2) = 3R_2$: R_2 , qui n'est pas nul, est donc un vecteur propre de f associé à la valeur propre 3.

On sait que lorsque, dans un espace de dimension n, un endomorphisme possède n valeurs propres distinctes, alors les sous-espaces propres sont de dimension 1. Les 3 sous-espaces propres $E_1(f), E_2(f), E_3(f)$ sont de dimension 1. Les trois vecteurs R_0 (resp R_1, R_2) constituent une base de $E_1(f)$ (resp $E_2(f)$, $E_3(f)$) et puisque f est diagonalisable , la famille (R_0, R_1, R_2) constitue une base de E .

$$\boxed{\mathcal{B}' = (R_0, R_1, R_2) \text{ est une base de } E \text{ formée de vecteurs propres de } f}$$

La matrice P de passage de la base canonique $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées de P_0, P_1 et P_2 dans $\mathcal{B}$:

$$\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

D'après les résultats du **4)**, $\boxed{D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}$

(On écrit en colonnes les coordonnées de $f(R_0), f(R_1)$ et $f(R_2)$ dans la base (R_0, R_1, R_2))

6)

Nous laissons le soin au lecteur de vérifier ces résultats, desquels on déduit :
$\begin{cases} P_2 &= R_0 + 2R_1 + R_2 \\ P_1 &= R_0 + R_1 \end{cases}$

On sait déjà que $R_0 = P_0$. La matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$ est P^{-1} ; on peut l'obtenir en écrivant en colonnes les coordonnées de P_0, P_1 et P_2 dans la base $\mathcal{B}'$.

On trouve $\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$

7)

A^{-1} et D^{-1} sont les matrices de f^{-1} dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. La matrice P étant la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, on sait d'après la formule de changement de bases pour les endomorphismes que $D^{-1} = P^{-1}A^{-1}P$, relation équivalente à $A^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$ (obtenue en multipliant la première égalité à gauche par P et à droite par P^{-1}.)

Remarque : On aurait pu aussi partir de l'égalité $A = PDP^{-1}$, prendre l'inverse des deux membres (il n'y a aucun souci car toutes les matrices sont inversibles) :

$A^{-1} = (PDP^{-1})^{-1} = (P^{-1})^{-1}D^{-1}P^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$.

On demande une récurrence, faisons une récurrence.

Initialisation :

Posons $(A^{-1})^0 = (D^{-1})^0 = I$ (matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$). Il est clair que l'égalité est alors satisfaite ; elle l'est aussi pour $n = 1$

Hérédité : Supposons que l'égalité soit satisfaite pour un entier $n \geq 0$: on a $(A^{-1})^n = P(D^{-1})^n P^{-1}$

$$\begin{aligned} (A^{-1})^{n+1} &= (A^{-1})^n \times A \\ &= P(D^{-1})^n P^{-1} PD^{-1}P^{-1} \\ &\quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence et le cas } n = 1 \\ &= P(D^{-1})^{n+1} P^{-1} \end{aligned}$$

L'égalité est vérifiée au rang $n+1$ et par le principe du raisonnement par récurrence

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ (A^{-1})^n = P(D^{-1})^n P^{-1}}$$

Remarque : On pouvait aussi dire ceci :

$(A^{-1})^n$ et $(D^{-1})^n$ sont les matrices de $(f^{-1})^n$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$; la matrice de passage de est $\mathcal{B}$ à$\mathcal{B}'$ est P : d'après la formule de changement de base, on avait tout de suite le résultat.

On sait que $D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et $(D^{-1})^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{2})^n & 0 \\ 0 & 0 & (\frac{1}{3})^n \end{pmatrix}$

d'après des propriétés classiques sur les matrices diagonales et

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

$$(A^{-1})^n = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{2})^n & 0 \\ 0 & 0 & (\frac{1}{3})^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -(\frac{1}{2})^n & (\frac{1}{3})^n \\ 0 & (\frac{1}{2})^n & -2(\frac{1}{3})^n \\ 0 & 0 & (\frac{1}{3})^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La troisième colonne de la matrice $(A^{-1})^n$ est $\boxed{\begin{pmatrix} 1-2(\frac{1}{2})^n+(\frac{1}{3})^n \\ 2(\frac{1}{2})^n-2(\frac{1}{3})^n \\ (\frac{1}{3})^n \end{pmatrix}}$

3.2 Suite d'épreuves aléatoires

1)

Nous remarquons que si l'on tire la boule numéro 2 au premier tirage, on n'enlève aucune boule de l'urne ; on peut donc obtenir $X_2 = 0, 1$ ou 2. Utilisons alors le système complet d'événements $((X_1 = 0), (X_1 = 1), (X_1 = 2))$. **D'après la formule des probabilités totales,**

$$P(X_2 = 0) = P(X_1 = 0)P_{X_1=0}(X_2 = 0) + P(X_1 = 1)P_{X_1=1}(X_2 = 0) + P(X_1 = 2)P_{X_1=2}(X_2 = 0)$$

- Si $(X_1 = 0)$ est réalisé, l'urne, avant le deuxième tirage, ne contient que la boule numéro 0 ; donc $P_{X_1=0}(X_2 = 0) = 1$
- Si $(X_1 = 1)$ est réalisé, l'urne, avant le deuxième tirage, contient les boules numéros 0 et 1 ; donc $P_{X_1=0}(X_2 = 0) = \frac{1}{2}$
- Si $(X_1 = 2)$ est réalisé, l'urne, avant le deuxième tirage, contient les 3 boules donc $P_{X_1=2}(X_2 = 0) = \frac{1}{3}$

D'autre part, $P(X_1 = k) = \frac{1}{3}$ pour $k = 0, 1, 2$

Finalement, on obtient $P(X_2 = 0) = \frac{1}{3}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}) = \frac{11}{18}$

Pour le calcul de $P(X_2 = 1)$, c'est le même principe, on a

$$P(X_2 = 1) = P(X_1 = 0)P_{X_1=0}(X_2 = 1) + P(X_1 = 1)P_{X_1=1}(X_2 = 1) + P(X_1 = 2)P_{X_1=2}(X_2 = 1)$$

- $P_{X_1=0}(X_2 = 1) = 0$ car si $(X_1 = 1)$ est réalisé, l'urne, à l'issue du premier tirage, ne contient plus la boule numéro 1.
- $P_{X_1=1}(X_2 = 1) = \frac{1}{2}$ car si $(X_1 = 1)$ est réalisé, l'urne, à l'issue du premier tirage, ne contient que les boules numéros 0 et 1.
- $P_{X_1=2}(X_2 = 1) = \frac{1}{3}$ car si $(X_1 = 2)$ est réalisé, l'urne, à l'issue du premier tirage, contient les 3 boules.

Finalement, on obtient $P(X_2 = 1) = \frac{1}{3}(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) = \frac{5}{18}$

On sait que les événements $(X_2 = 0), (X_2 = 1), (X_2 = 2)$ forment un système complet, donc $P(X_2 = 2) = 1 - P(X_2 = 0) - P(X_2 = 1) = \frac{2}{18}$. Récapitulons :

k	0	1	2
$P(X = k)$	$\frac{11}{18}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{2}{18}$

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

$$E(X_2) = \frac{1}{18}(1\times 5 + 2\times 2) = \boxed{\frac{1}{2}}$$
$$E(X_2^2) = \frac{1}{18}(1\times 5 + 4\times 2) = \boxed{\frac{13}{18}}$$
$$V(X_2) = E(X_2^2) - (E(X_2))^2 = \frac{13}{18} - \frac{1}{4} = \boxed{\frac{17}{36}}$$

2)

Remarquons que si aux rangs $1, 2, \ldots, k$ on tire toujours la boule numéro 2, alors à l'issue du $k^{\text{ème}}$ tirage, l'urne contiendra les trois boules, donc X_k peut prendre les valeurs $0, 1, 2$.

Utilisons le système complet d'événements $((X_k = 0), (X_k = 1), (X_k = 2))$ pour $k \geq 1$. Les raisonnements et les calculs se font **exactement** de la même façon qu'au **1)** : on remplace dans la formule des probabilités totales 1 par k et 2 par $k+1$. On obtient les résultats suivants :

$$P_{X_k=0}(X_{k+1}=0) = 1; \quad P_{X_k=1}(X_{k+1}=0) = \frac{1}{2}; \quad P_{X_k=2}(X_{k+1}=0) = \frac{1}{3}$$
$$P_{X_k=0}(X_{k+1}=1) = 0; \quad P_{X_k=1}(X_{k+1}=1) = \frac{1}{2}; \quad P_{X_k=2}(X_{k+1}=1) = \frac{1}{3}$$
$$P_{X_k=0}(X_{k+1}=2) = 0; \quad P_{X_k=1}(X_{k+1}=2) = 0; \quad P_{X_k=2}(X_{k+1}=2) = \frac{1}{3}$$

En repportant ces résultats dans la formule des probabilités totales, on a :

$$P(X_{k+1}=0) = P(X_k=0) + \frac{1}{2}P(X_k=1) + \frac{1}{3}P(X_k=2)$$
$$P(X_{k+1}=1) = \frac{1}{2}P(X_k=1) + \frac{1}{3}P(X_k=2)$$
$$P(X_{k+1}=2) = \frac{1}{3}P(X_k=2)$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} P(X_{k+1}=0) \\ P(X_{k+1}=1) \\ P(X_{k+1}=2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(X_k=0) \\ P(X_k=1) \\ P(X_k=2) \end{pmatrix}$$

On vérifie que $A \times \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = I$; on peut alors écrire : $\forall k \geq 1,\ U_{k+1} = A^{-1}U_k$

Pour $k=0$, $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = U_1$ d'après les calculs effectués dans **1)**

$$\boxed{\text{Conclusion : } \forall k \in \mathbb{N},\ U_{k+1} = A^{-1}U_k}$$

3)

On démontre alors facilement par récurrence (et nous laissons ce petit travail au lecteur) que

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ U_k = (A^{-1})^k U_0}$$

4)

L'égalité précédente s'écrit aussi : $\begin{pmatrix} P(X_k=0) \\ P(X_k=1) \\ P(X_k=2) \end{pmatrix} = (A^{-1})^k \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ce produit est en fait, d'après les règles de calcul du produit matriciel, la troisième colonne de la

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

matrice $(A^{-1})^k$ et le résultat a été donné au **3.1–7)** avec n au lieu de k. On peut donc conclure :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} P(X_k = 0) & = 1 - 2(\frac{1}{2})^k + (\frac{1}{3})^k \\ P(X_k = 1) & = 2(\frac{1}{2})^k - 2(\frac{1}{3})^k \\ P(X_k = 2) & = (\frac{1}{3})^k \end{cases}}$$

$$\left|\frac{1}{2}\right| < 1 \text{ et } \left|\frac{1}{3}\right| < 1 \Longrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{k\to+\infty} (\frac{1}{2})^k = 0 \\ \lim\limits_{k\to+\infty} (\frac{1}{3})^k = 0 \end{cases} \text{ Donc}$$

$$\boxed{\lim_{k\to+\infty} P(X_k = 0) = 1 \ ; \ \lim_{k\to+\infty} P(X_k = 1) = \lim_{k\to+\infty} P(X_k = 2) = 0}$$

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021