



Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Calculer $\int_0^1 x^2 dx$ et $\int_0^1 x^3 dx$ en utilisant des sommes de Riemman.

EXERCICE 2 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Calculer la limite quand n tend vers $+\infty$, de $S_n = \sum_{k=n}^{k=pn} \frac{1}{k}$ (avec $p \in \mathbb{N}^*$).

EXERCICE 3 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$, avec $S_n = (C_{2n}^n)^{1/n}$.

EXERCICE 4 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$, avec $S_n = \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \sqrt{k}$.

EXERCICE 5 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit f une application continue sur $[0, 1]$, strictement positive.

Montrer que $\int_0^1 \ln f(x) dx \leq \ln \int_0^1 f(x) dx$.

Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

$$\text{Écrire } \int_0^1 x^2 dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^2} = \dots, \text{ et } \int_0^1 x^3 dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k^3}{n^3} = \dots.$$

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

S_n est une somme de Riemann de $f(x) = \frac{1}{x}$, de pas $\frac{1}{n}$, sur le segment $[1, p]$.

Sa limite, quand n tend vers $+\infty$, est $\ln p$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

Vérifier que $\ln S_n$ est une somme de Riemann de $x \mapsto \ln x$ sur $[1, 2]$.

En déduire que lorsque n tend vers $+\infty$, S_n tend vers $\frac{4}{e}$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

Constater que S_n est une somme de Riemann de $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0, 1]$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{2}{3}$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

Passer par une somme de Riemann de f sur $[0, 1]$, de pas $\frac{1}{n}$.

Utiliser la concavité de $x \mapsto \ln x$, puis passer à la limite quand $n \rightarrow +\infty$.

Corrigés des exercices

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 1 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue par morceaux.

On rappelle que $\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)$.

– On applique ce qui précède à l'application $x \mapsto x^2$ sur $[0, 1]$.

$$\text{On obtient } \int_0^1 x^2 dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{– De même } \int_0^1 x^3 dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k^3}{n^3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^4} \sum_{k=1}^n k^3 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)^2}{4n^2} = \frac{1}{4}.$$

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 2 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

Posons $f(x) = \frac{1}{x}$, et $c_k = 1 + \frac{k}{n}$, avec $k \in \{0, n(p-1)\}$.

Les coefficients c_k forment une subdivision régulière de $[1, p]$, de pas $\frac{1}{n}$.

$$\text{Avec ces notations, } S_n = \sum_{k=n}^{np} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n(p-1)} \frac{1}{\frac{k}{n} + 1} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n(p-1)} f(c_k).$$

On reconnaît une somme de Riemann de f sur le segment $[1, p]$.

Sa limite, quand le pas $h = \frac{1}{n}$ tend vers 0, est $\int_1^p f(x) dx = [\ln x]_1^p = \ln p$.

$$\text{Conclusion : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n}^{np} \frac{1}{k} = \ln p.$$

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 3 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

$$\text{On a } \ln S_n = \frac{1}{n} \ln \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{1}{n} \ln \left(\frac{1}{n!} \prod_{k=1}^n (n+k) \right) = \frac{1}{n} \ln \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n} \right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right).$$

Ainsi $\ln S_n$ est une somme de Riemann de $x \mapsto \ln x$ sur $[1, 2]$.

$$\text{On en déduit } \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln S_n = \int_1^2 \ln x dx = [x \ln x - x]_1^2 = 2 \ln 2 - 1 = \ln \frac{4}{e}.$$

Conclusion : lorsque n tend vers $+\infty$, S_n tend vers $\frac{4}{e}$.

**CORRIGÉ DE L'EXERCICE 4** [[Retour à l'énoncé](#)]

On constate que $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n}}$ est une somme de Riemann de $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0, 1]$.

On en déduit $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \int_0^1 \sqrt{x} \, dx = \left[\frac{2}{3} x \sqrt{x} \right]_0^1 = \frac{2}{3}$

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 5 [[Retour à l'énoncé](#)]

Soit $n \geq 1$ un entier, et la subdivision de $[0, 1]$ définie par $x_k = \frac{k}{n}$.

On sait que la somme de Riemann $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln f(x_k)$ vérifie $\lim S_n = \int_0^1 \ln f(x) \, dx$.

$x \mapsto \ln x$ est concave donc $S_n \leq \ln S'_n$, avec $S'_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k)$. Or $\lim_{n \rightarrow \infty} S'_n = \int_0^1 f(x) \, dx$.

Quand $n \rightarrow +\infty$, l'inégalité $S_n \leq \ln S'_n$ donne donc $\int_0^1 \ln f(x) \, dx \leq \ln \int_0^1 f(x) \, dx$.