

## Énoncés des exercices

### EXERCICE 1 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Soit  $f : [0, a] \rightarrow [0, b]$ , continue strictement croissante, avec  $\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(a) = b \end{cases}$ . On note  $g = f^{-1}$ .

1. Montrer que  $ab = \int_0^a f(x) dx + \int_0^b g(x) dx$ . (utiliser des sommes de Riemann.)

2. Montrer que :  $\forall u \in [0, a], \forall v \in [0, b], uv \leq \int_0^u f(x) dx + \int_0^v g(x) dx$ .

### EXERCICE 2 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Soit  $f$  une application continue sur  $[0, 1]$ . Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^k f\left(\frac{k}{n}\right) = 0$ .

### EXERCICE 3 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Soient  $f$  et  $g$  deux applications continues sur  $[0, 1]$ .

Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k+1}{n}\right) = \int_0^1 f(x)g(x) dx$ .

### EXERCICE 4 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ , avec  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + kn}}$ .

### EXERCICE 5 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Soit  $f$  une application de classe  $\mathcal{C}^3$  sur  $[a, b]$ , et  $n \in \mathbb{N}^*$ .

On pose  $M_3 = \sup_{[a,b]} |f^{(3)}|$  et  $S_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$ .

On définit de même les sommes  $S_n(f')$  et  $S_n(f'')$ .

1. Montrer que  $\left| \int_a^b f(x) dx - S_n(f) - \frac{b-a}{2n} S_n(f') - \frac{(b-a)^2}{6n^2} S_n(f'') \right| \leq \frac{(b-a)^4}{24n^3} M_3$

2. Prouver que  $\int_a^b f(x) dx = S_n(f) + \frac{b-a}{2n} (f(b) - f(a)) - \frac{(b-a)^2}{12n^2} (f'(b) - f'(a)) + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$

## Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [[Retour à l'énoncé](#)]

1. Pour  $n \geq 1$  fixé, et pour  $0 \leq k \leq n$ , poser  $x_k = \frac{ka}{n}$  et  $y_k = f(x_k)$ .

Considérer  $S_n = \frac{a}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k)$  et  $S'_n = \sum_{k=0}^{n-1} (y_{k+1} - y_k)g(y_k)$ .

Il est clair que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \int_0^a f(x) dx$ . Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S'_n = \int_0^b g(x) dx$ .

Établir ensuite que  $S_n + S'_n = ab$ , et conclure.

2. Vérifier que  $\int_0^u f(x) dx + \int_0^v g(x) dx - uv = \int_{f(u)}^v (g(x) - u) dx \geq 0$ .

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [[Retour à l'énoncé](#)]

Ecrire  $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^k f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{2}(S'_n - S''_n)$  en séparant les indices pairs des indices impairs.

Constater que  $S'_n$  et  $S''_n$  sont deux sommes de Riemann de  $f$  sur  $[0, 1]$ .

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [[Retour à l'énoncé](#)]

Poser  $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)g\left(\frac{k+1}{n}\right)$  et  $T_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)g\left(\frac{k}{n}\right)$ .

Utiliser l'uniforme continuité de  $g$  pour montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n - T_n) = 0$ .

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [[Retour à l'énoncé](#)]

$S_n$  est une somme de Riemann de  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$  sur  $[0, 1]$ . On trouve  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 2(\sqrt{2} - 1)$ .

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [[Retour à l'énoncé](#)]

1. Poser  $x_k = a + k \frac{b-a}{n}$ , avec  $k \in \{0, \dots, n-1\}$ .

Appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à  $f$  entre  $x_k$  et  $x$ , avec  $x \in [x_k, x_{k+1}]$ .

Intégrer terme à terme avant de sommer de  $k = 0$  à  $k = n-1$ .

2. La question précédente donne un DL de  $S_n(f)$ .

Utiliser des DL analogues (mais de précision moindre) pour  $S_n(f')$  et  $S_n(f'')$ .

## Corrigés des exercices

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 1 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

1. Soit  $n$  un entier positif. On pose  $x_k = \frac{ka}{n}$  et  $y_k = f(x_k)$ , pour tout  $k$  de  $\{0, \dots, n\}$ .

Les  $x_k$  forment une subdivision régulière  $\sigma$  de  $[0, a]$ . La fonction  $f$  étant croissante, les  $y_k$  forment une subdivision (à priori non régulière) de  $[0, b]$  (on rappelle que  $f(0) = 0$ ).

On considère les sommes de Riemann  $S_n = \frac{a}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k)$  et  $S'_n = \sum_{k=0}^{n-1} (y_{k+1} - y_k)g(y_k)$ .

Lorsque  $n \rightarrow \infty$ , la somme  $S_n$  tend vers  $\int_0^a f(x) dx$ .

$f$  étant continue sur le segment  $[0, 1]$ , elle y est uniformément continue (Th de Heine.)

Il en découle que le "pas" de la subdivision  $\sigma'$  tend vers 0 lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .

On en déduit que  $S'_n$  tend vers  $\int_0^b g(x) dx$  quand  $n \rightarrow +\infty$ . D'autre part :

$$\begin{aligned} S_n + S'_n &= \frac{a}{n} \sum_{k=1}^n y_k + \sum_{k=0}^{n-1} (y_{k+1} - y_k)x_k = \frac{a}{n} \sum_{k=1}^n y_k + \sum_{k=0}^{n-1} x_k y_{k+1} - \sum_{k=0}^{n-1} x_k y_k \\ &= \frac{a}{n} \sum_{k=1}^n y_k + \sum_{k=1}^n x_{k-1} y_k - \sum_{k=0}^{n-1} x_k y_k = \sum_{k=1}^{n-1} \underbrace{\left( \frac{a}{n} - x_k + x_{k-1} \right)}_{=0} y_k + \left( \frac{a}{n} + x_{n-1} \right) b = ab \end{aligned}$$

Quand  $n \rightarrow \infty$ , l'égalité  $S_n + S'_n = ab$  donne donc  $\int_0^a f(x) dx + \int_0^b g(x) dx = ab$ .

2. On se donne  $u \in [0, a]$  et  $v \in [0, b]$ .

D'après la question précédente, on a  $\int_0^u f(x) dx + \int_0^{f(u)} g(x) dx = uf(u)$ . Ainsi :

$$\begin{aligned} \int_0^u f(x) dx + \int_0^v g(x) dx - uv &= \int_0^u f(x) dx + \int_0^{f(u)} g(x) dx + \int_{f(u)}^v g(x) dx - uv \\ &= u(f(u) - v) + \int_{f(u)}^v g(x) dx = \int_{f(u)}^v (g(x) - u) dx \end{aligned}$$

Rappelons que l'application  $g$ , tout comme  $f$ , est croissante.

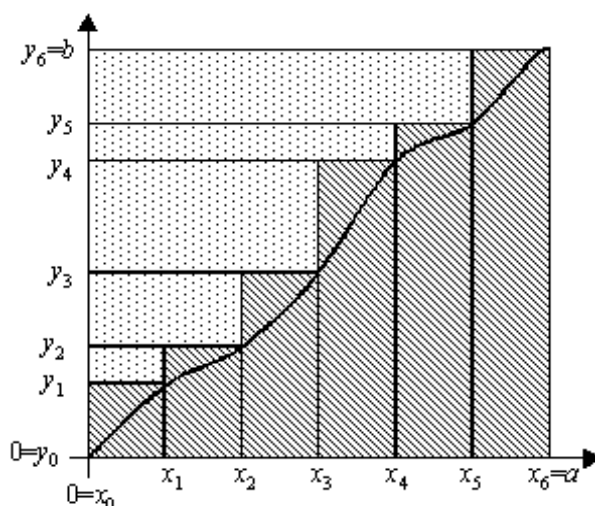
– Si  $f(u) \leq v$ , alors  $u \leq g(x) \leq g(v)$  sur  $[f(u), v]$ .

– Si  $v \leq f(u)$ , alors  $g(v) \leq g(x) \leq u$  sur  $[v, f(u)]$ .

Dans tous les cas, on a donc  $\int_{f(u)}^v (g(x) - u) dx \geq 0$ .

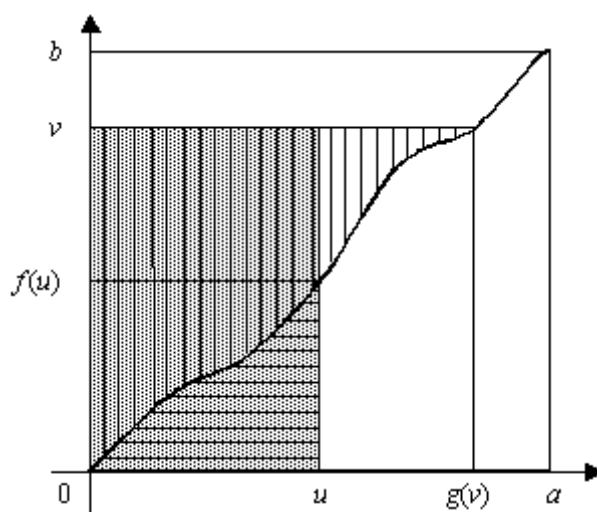
Compte tenu du calcul précédent, on en déduit  $\int_0^u f(x) dx + \int_0^v g(x) dx \geq uv$ .

3. Le schéma ci-dessous illustre l'idée de la démonstration de la première question. On y voit la subdivision  $(x_k)$  de  $[0, a]$ , ainsi que la subdivision  $(y_k)$  de  $[0, b]$ . La somme de Riemann  $S_6$  de  $f$  est représenté par des hachures obliques. La somme de Riemann  $S'_6$  de  $g$  est représentée par un nuage de points. On voit bien comment les sommes  $S_6$  et  $S'_6$  s'emboîtent de telle sorte que  $S_6 + S'_6 = ab$ .



Quand  $n \rightarrow \infty$  on devine que  $S_n$  et  $S'_n$  tendent respectivement vers l'intégrale de  $f$  sur  $[0, a]$  (aire du domaine situé sous la courbe  $y = f(x)$  et dans le rectangle  $[0, a] \times [0, b]$ ) et vers l'intégrale de  $g = f^{-1}$  sur  $[0, b]$  (aire du domaine situé au-dessus de la courbe  $y = f(x)$  et dans le rectangle  $[0, a] \times [0, b]$ ). Le fait que la somme des deux aires soit égale à  $ab$  est aussi particulièrement évident sur ce graphique.

Le dessin ci-dessous illustre la question 2. On s'est placé ici dans le cas  $v \geq f(u)$ . L'intégrale de  $f$  sur  $[0, v]$  est hachurée horizontalement. Celle de  $g$  sur  $[0, v]$  est hachurée verticalement. On voit que la somme de ces deux aires dépasse  $uv$  (le rectangle grisé.)



**CORRIGÉ DE L'EXERCICE 2** [[Retour à l'énoncé](#)]

On sépare  $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^k f\left(\frac{k}{n}\right)$  en deux sommes, en fonction de la parité de l'indice  $k$ .

Ainsi  $S_n = \frac{1}{2}(S'_n - S''_n)$ , avec  $S'_n = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n/2} f\left(\frac{2k}{n}\right)$  et  $S''_n = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{(n-1)/2} f\left(\frac{2k+1}{n}\right)$ .

Or  $S'_n$  et  $S''_n$  sont deux sommes de Riemann de  $f$  sur  $[0, 1]$ .

On a donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} S'_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S''_n = \int_0^1 f(x) dx$ . Il en découle  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 0$ .

**CORRIGÉ DE L'EXERCICE 3** [[Retour à l'énoncé](#)]

Posons  $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k+1}{n}\right)$  et  $T_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k}{n}\right)$ .

On sait que  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \int_0^1 f(x)g(x) dx$ . Il reste donc à montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n - T_n) = 0$ .

On constate que  $S_n - T_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \left(g\left(\frac{k+1}{n}\right) - g\left(\frac{k}{n}\right)\right)$ .

Donnons-nous  $\varepsilon > 0$ . L'application  $g$  étant continue sur le segment  $[0, 1]$ , elle y est uniformément continue (théorème de Heine.)

Ainsi il existe un réel  $\alpha > 0$  tel que :  $\forall (x, y) \in [0, 1]^2, |x - y| \leq \alpha \Rightarrow |g(x) - g(y)| \leq \varepsilon$ .

On en déduit que si  $n \geq \frac{1}{\alpha}$ , alors on a :  $\forall k \in \{0, \dots, n-1\}, \left|g\left(\frac{k+1}{n}\right) - g\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq \varepsilon$ .

Ainsi  $n \geq \frac{1}{\alpha} \Rightarrow |S_n - T_n| \leq \varepsilon U_n$ , avec  $U_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right|$ .

Mais la suite  $(U_n)$  converge vers  $\int_0^1 |f(x)| dx$  : cette suite est donc bornée.

Il existe donc  $M \geq 0$  et un entier  $n \geq n_0$  tels que :  $n \geq n_0 \Rightarrow |S_n - T_n| \leq M\varepsilon$ .

Ainsi  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n - T_n) = 0$ , et finalement  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k+1}{n}\right) = \int_0^1 f(x)g(x) dx$ .

**CORRIGÉ DE L'EXERCICE 4** [[Retour à l'énoncé](#)]

On constate que  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + kn}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{k}{n}}}$ .

On en déduit  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x}} = \left[2\sqrt{1+x}\right]_0^1 = 2(\sqrt{2} - 1)$

## CORRIGÉ DE L'EXERCICE 5 [Retour à l'énoncé]

1. Pour simplifier les notations posons  $x_k = a + k \frac{b-a}{n}$ , avec  $k \in \{0, \dots, n-1\}$ .

$$\text{On peut écrire } R_n(f) = \int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(x) - f(x_k)) dx$$

On applique Taylor-Lagrange entre  $x_k$  et  $x$ , avec  $x \in [x_k, x_{k+1}]$  :

$$\left| f(x) - f(x_k) - (x - x_k)f'(x_k) - \frac{(x - x_k)^2}{2} f''(x_k) \right| \leq \frac{(x - x_k)^3}{6} M_3$$

On procède ensuite à une intégration sur  $[x_k, x_{k+1}]$ . On trouve

$$\left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left( f(x) - f(x_k) - (x - x_k)f'(x_k) - \frac{(x - x_k)^2}{2} f''(x_k) \right) dx \right| \leq \frac{M_3}{6} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (x - x_k)^3 dx$$

Autrement dit, compte tenu de ce que  $x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{n}$  :

$$\left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(x) - f(x_k)) dx - \frac{(b-a)^2}{2n^2} f'(x_k) - \frac{(b-a)^3}{6n^3} f''(x_k) \right| \leq \frac{(b-a)^4}{24n^4} M_3$$

On en déduit, par sommation de  $k = 0$  à  $k = n-1$  :

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} \left( \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(x) - f(x_k)) dx - \frac{(b-a)^2}{2n^2} f'(x_k) - \frac{(b-a)^3}{6n^3} f''(x_k) \right) \right| \leq \frac{(b-a)^4}{24n^3} M_3$$

$$\text{Posons } S_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k), S_n(f') = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f'(x_k) \text{ et } S_n(f'') = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f''(x_k).$$

L'inégalité précédente devient :

$$\left| \int_a^b f(x) dx - S_n(f) - \frac{b-a}{2n} S_n(f') - \frac{(b-a)^2}{6n^2} S_n(f'') \right| \leq \frac{(b-a)^4}{24n^3} M_3$$

$$2. \text{ Ainsi } \int_a^b f(x) dx = S_n(f) + \frac{b-a}{2n} S_n(f') + \frac{(b-a)^2}{6n^2} S_n(f'') + O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

En agissant sur  $f'$  (à un rang moindre) et sur  $f''$  (à un rang moindre encore), on trouve :

$$\int_a^b f'(x) dx = S_n(f') + \frac{b-a}{2n} S_n(f'') + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \text{et} \quad \int_a^b f''(x) dx = S_n(f'') + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\text{Ainsi } S_n(f'') = \int_a^b f''(x) dx + O\left(\frac{1}{n}\right) \text{ et } S_n(f') = \int_a^b f'(x) dx - \frac{b-a}{2n} \int_a^b f''(x) dx + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

On en déduit :

$$\int_a^b f(x) dx = S_n(f) + \frac{b-a}{2n} \int_a^b f'(x) dx - \frac{(b-a)^2}{12n^2} \int_a^b f''(x) dx + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$\text{Finalement : } \int_a^b f(x) dx = S_n(f) + \frac{b-a}{2n} (f(b) - f(a)) - \frac{(b-a)^2}{12n^2} (f'(b) - f'(a)) + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$