Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Soit $f : [0,a] \to [0,b]$, continue strictement croissante, avec $\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(a) = b \end{cases}$. On note $g = f^{-1}$.

1. Montrer que $ab = \displaystyle\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^b g(x)\,\mathrm{d}x$. (utiliser des sommes de Riemann.)
2. Montrer que : $\forall\, u \in [0,a],\ \forall\, v \in [0,b]\ ,\quad uv \leq \displaystyle\int_0^u f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^v g(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Soit f une application continue sur $[0,1]$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k f(\frac{k}{n}) = 0$.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Soient f et g deux applications continues sur $[0,1]$.

Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\Big(\frac{k}{n}\Big)g\Big(\frac{k+1}{n}\Big) = \int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$, avec $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+kn}}$.

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Soit f une application de classe $\mathcal{C}^3$ sur $[a,b]$, et $n \in \mathbb{N}^*$.

On pose $M_3 = \sup\limits_{[a,b]} \left|f^{(3)}\right|$ et $S_n(f) = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\Big(\frac{k}{n}\Big)$.

On définit de même les sommes $S_n(f')$ et $S_n(f'')$.

1. Montrer que $\left|\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - S_n(f) - \frac{b-a}{2n}S_n(f') - \frac{(b-a)^2}{6n^2}S_n(f'')\right| \leq \frac{(b-a)^4}{24n^3}M_3$
2. Prouver que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = S_n(f) + \frac{b-a}{2n}(f(b)-f(a)) - \frac{(b-a)^2}{12n^2}(f'(b)-f'(a)) + \mathrm{O}\Big(\frac{1}{n^3}\Big)$

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

1. Pour $n \geq 1$ fixé, et pour $0 \leq k \leq n$, poser $x_k = \dfrac{ka}{n}$ et $y_k = f(x_k)$.

   Considérer $S_n = \dfrac{a}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$ et $S'_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(y_{k+1} - y_k)g(y_k)$.

   Il est clair que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \displaystyle\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} S'_n = \displaystyle\int_0^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

   Établir ensuite que $S_n + S'_n = ab$, et conclure.
2. Vérifier que $\displaystyle\int_0^u f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^v g(x)\,\mathrm{d}x - uv = \int_{f(u)}^{v} (g(x) - u)\,\mathrm{d}x \geq 0$.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

Ecrire $S_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k f(\frac{k}{n}) = \frac{1}{2}(S'_n - S''_n)$ en séparant les indices pairs des indices impairs.

Constater que S'_n et S''_n sont deux sommes de Riemann de f sur $[0,1]$.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

Poser $S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\Big(\frac{k}{n}\Big)g\Big(\frac{k+1}{n}\Big)$ et $T_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\Big(\frac{k}{n}\Big)g\Big(\frac{k}{n}\Big)$.

Utiliser l'uniforme continuité de g pour montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}(S_n - T_n) = 0$.

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

S_n est une somme de Riemann de $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ sur $[0,1]$. On trouve $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 2(\sqrt{2}-1)$.

Indication pour l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

1. Poser $x_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$, avec $k \in \{0,\dots,n-1\}$.

   Appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à f entre x_k et x, avec $x \in [x_k, x_{k+1}]$.

   Intégrer terme à terme avant de sommer de $k=0$ à $k=n-1$.
2. La question précédente donne un DL de $S_n(f)$.

   Utiliser des DL analogues (mais de précision moindre) pour $S_n(f')$ et $S_n(f'')$.

 ©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

1. Soit n un entier positif. On pose $x_k = \dfrac{ka}{n}$ et $y_k = f(x_k)$, pour tout k de $\{0, \dots, n\}$.

   Les x_k forment une subdivision régulière σ de $[0, a]$. La fonction f étant croissante, les y_k forment une subdivision (à priori non régulière) de $[0, b]$ (on rappelle que $f(0) = 0$).

   On considère les sommes de Riemann $S_n = \dfrac{a}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$ et $S'_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(y_{k+1} - y_k)g(y_k)$.

   Lorsque $n \to \infty$, la somme S_n tend vers $\displaystyle\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

   f étant continue sur le segment $[0, 1]$, elle y est uniformément continue (Th de Heine.)
   Il en découle que le "pas" de la subdivision σ' tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$.

   On en déduit que S'_n tend vers $\displaystyle\int_0^b g(x)\,\mathrm{d}x$ quand $n \to +\infty$. D'autre part :

$$\begin{aligned} S_n + S'_n &= \frac{a}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k + \sum_{k=0}^{n-1}(y_{k+1} - y_k)x_k = \frac{a}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k + \sum_{k=0}^{n-1} x_k y_{k+1} - \sum_{k=0}^{n-1} x_k y_k \\ &= \frac{a}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k + \sum_{k=1}^{n} x_{k-1}y_k - \sum_{k=0}^{n-1} x_k y_k = \sum_{k=1}^{n-1}\Big(\underbrace{\frac{a}{n} - x_k + x_{k-1}}_{=0}\Big)y_k + \Big(\frac{a}{n} + x_{n-1}\Big)b = ab \end{aligned}$$

   Quand $n \to \infty$, l'égalité $S_n + S'_n = ab$ donne donc $\displaystyle\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^b g(x)\,\mathrm{d}x = ab$.

2. On se donne $u \in [0, a]$ et $v \in [0, b]$.

   D'après la question précédente, on a $\displaystyle\int_0^u f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{f(u)} g(x)\,\mathrm{d}x = uf(u)$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \int_0^u f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^v g(x)\,\mathrm{d}x - uv &= \int_0^u f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{f(u)} g(x)\,\mathrm{d}x + \int_{f(u)}^v g(x)\,\mathrm{d}x - uv \\ &= u(f(u) - v) + \int_{f(u)}^v g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{f(u)}^v (g(x) - u)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

   Rappelons que l'application g, tout comme f, est croissante.

   – Si $f(u) \leq v$, alors $u \leq g(x) \leq g(v)$ sur $[f(u), v]$.

   – Si $v \leq f(u)$, alors $g(v) \leq g(x) \leq u$ sur $[v, f(u)]$.

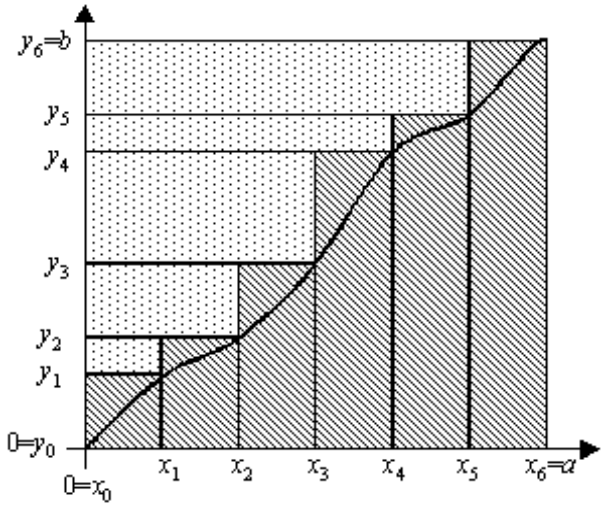
   Dans tous les cas, on a donc $\displaystyle\int_{f(u)}^v (g(x) - u)\,\mathrm{d}x \geq 0$.

   Compte tenu du calcul précédent, on en déduit $\displaystyle\int_0^u f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^v g(x)\,\mathrm{d}x \geq uv$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

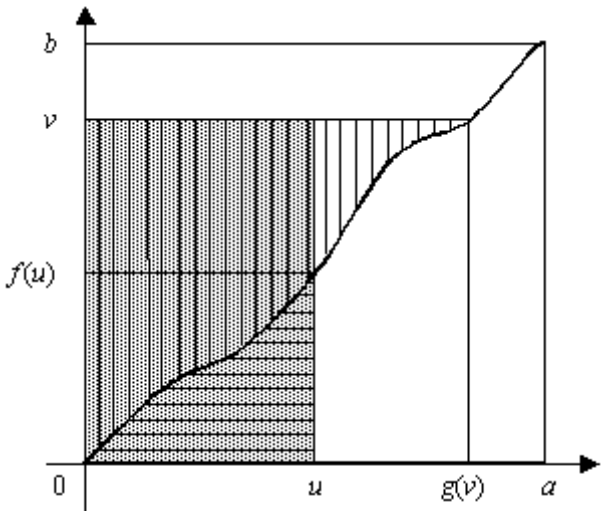
Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

3. Le schéma ci-dessous illustre l'idée de la démonstration de la première question.
On y voit la subdivision (x_k) de $[0,a]$, ainsi que la subdivision (y_k) de $[0,b]$.
La somme de Riemann S_6 de f est représenté par des hachures obliques.
La somme de Riemann S'_6 de g est représentée par un nuage de points.
On voit bien comment les sommes S_6 et S'_6 s'emboîtent de telle sorte que $S_6 + S'_6 = ab$.



Quand $n \to \infty$ on devine que S_n et S'_n tendent respectivement vers l'intégrale de f sur $[0,a]$ (aire du domaine situé sous la courbe $y = f(x)$ et dans le rectangle $[0,a] \times [0,b]$) et vers l'intégrale de $g = f^{-1}$ sur $[0,b]$ (aire du domaine situé au-dessus de la courbe $y = f(x)$ et dans le rectangle $[0,a] \times [0,b]$). Le fait que la somme des deux aires soit égale à ab est aussi particulièrement évident sur ce graphique.

Le dessin ci-dessous illustre la question 2. On s'est placé ici dans le cas $v \geq f(u)$. L'intégrale de f sur $[0,v]$ est hachurée horizontalement. Celle de g sur $[0,v]$ est hachurée verticalement. On voit que la somme de ces deux aires dépasse uv (le rectangle grisé.)



Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Corrigé de l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

On sépare $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k f(\frac{k}{n})$ en deux sommes, en fonction de la parité de l'indice k.

Ainsi $S_n = \frac{1}{2}(S'_n - S''_n)$, avec $S'_n = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n/2} f(\frac{2k}{n})$ et $S''_n = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{(n-1)/2} f(\frac{2k+1}{n})$.

Or S'_n et S''_n sont deux sommes de Riemann de f sur $[0,1]$.

On a donc $\lim\limits_{n\to\infty} S'_n = \lim\limits_{n\to\infty} S''_n = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$. Il en découle $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 0$.

Corrigé de l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

Posons $S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\Big(\frac{k}{n}\Big)g\Big(\frac{k+1}{n}\Big)$ et $T_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\Big(\frac{k}{n}\Big)g\Big(\frac{k}{n}\Big)$.

On sait que $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = \int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$. Il reste donc à montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}(S_n - T_n) = 0$.

On constate que $S_n - T_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\Big(\frac{k}{n}\Big)\left(g\Big(\frac{k+1}{n}\Big) - g\Big(\frac{k}{n}\Big)\right)$.

Donnons-nous $\varepsilon > 0$. L'application g étant continue sur le segment $[0,1]$, elle y est uniformément continue (théorème de Heine.)

Ainsi il existe un réel $\alpha > 0$ tel que : $\forall\,(x,y) \in [0,1]^2,\ |x-y| \leq \alpha \Rightarrow |g(x) - g(y)| \leq \varepsilon$.

On en déduit que si $n \geq \dfrac{1}{\alpha}$, alors on a : $\forall\, k \in \{0,\dots,n-1\},\ \Big|g\Big(\frac{k+1}{n}\Big) - g\Big(\frac{k}{n}\Big)\Big| \leq \varepsilon$.

Ainsi $n \geq \dfrac{1}{\alpha} \Rightarrow |S_n - T_n| \leq \varepsilon U_n$, avec $U_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\Big|f\Big(\frac{k}{n}\Big)\Big|$.

Mais la suite (U_n) converge vers $\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x$: cette suite est donc bornée.

Il existe donc $M \geq 0$ et un entier $n \geq n_0$ tels que : $n \geq n_0 \Rightarrow |S_n - T_n| \leq M\varepsilon$.

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty}(S_n - T_n) = 0$, et finalement $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\Big(\frac{k}{n}\Big)g\Big(\frac{k+1}{n}\Big) = \int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$.

Corrigé de l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

On constate que $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+kn}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}}$.

On en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x}} = \Big[2\sqrt{1+x}\Big]_0^1 = 2(\sqrt{2}-1)$

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Corrigé de l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

1. Pour simplifier les notations posons $x_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$, avec $k \in \{0, \dots, n-1\}$.

On peut écrire $R_n(f) = \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(x) - f(x_k))\,\mathrm{d}x$

On applique Taylor-Lagrange entre x_k et x, avec $x \in [x_k, x_{k+1}]$:

$$\left|f(x) - f(x_k) - (x-x_k)f'(x_k) - \frac{(x-x_k)^2}{2}f''(x_k)\right| \leq \frac{(x-x_k)^3}{6}M_3$$

On procède ensuite à une intégration sur $[x_k, x_{k+1}]$. On trouve

$$\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}}\left(f(x) - f(x_k) - (x-x_k)f'(x_k) - \frac{(x-x_k)^2}{2}f''(x_k)\right)\mathrm{d}x\right| \leq \frac{M_3}{6}\int_{x_k}^{x_{k+1}}(x-x_k)^3\,\mathrm{d}x$$

Autrement dit, compte tenu de ce que $x_{k+1} - x_k = \dfrac{b-a}{n}$:

$$\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}}(f(x) - f(x_k))\,\mathrm{d}x - \frac{(b-a)^2}{2n^2}f'(x_k) - \frac{(b-a)^3}{6n^3}f''(x_k)\right| \leq \frac{(b-a)^4}{24n^4}M_3$$

On en déduit, par sommation de $k=0$ à $k=n-1$:

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{x_k}^{x_{k+1}}(f(x) - f(x_k))\,\mathrm{d}x - \frac{(b-a)^2}{2n^2}f'(x_k) - \frac{(b-a)^3}{6n^3}f''(x_k)\right)\right| \leq \frac{(b-a)^4}{24n^3}M_3$$

Posons $S_n(f) = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$, $S_n(f') = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f'(x_k)$ et $S_n(f'') = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f''(x_k)$.

L'inégalité précédente devient :

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - S_n(f) - \frac{b-a}{2n}S_n(f') - \frac{(b-a)^2}{6n^2}S_n(f'')\right| \leq \frac{(b-a)^4}{24n^3}M_3$$

2. Ainsi $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = S_n(f) + \frac{b-a}{2n}S_n(f') + \frac{(b-a)^2}{6n^2}S_n(f'') + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)$.

En agissant sur f' (à un rang moindre) et sur f'' (à un rang moindre encore), on trouve :

$$\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = S_n(f') + \frac{b-a}{2n}S_n(f'') + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \text{et} \quad \int_a^b f''(x)\,\mathrm{d}x = S_n(f'') + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)$$

Ainsi $S_n(f'') = \displaystyle\int_a^b f''(x)\,\mathrm{d}x + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)$ et $S_n(f') = \displaystyle\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x - \frac{b-a}{2n}\int_a^b f''(x)\,\mathrm{d}x + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$

On en déduit :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = S_n(f) + \frac{b-a}{2n}\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x - \frac{(b-a)^2}{12n^2}\int_a^b f''(x)\,\mathrm{d}x + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

Finalement : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = S_n(f) + \frac{b-a}{2n}(f(b) - f(a)) - \frac{(b-a)^2}{12n^2}(f'(b) - f'(a)) + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)$

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021