Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Soit $f : [0, a] \to [0, b]$, continue strictement croissante, avec $\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(a) = b \end{cases}$. On note $g = f^{-1}$.

1. Montrer que $ab = \displaystyle\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^b g(x)\,\mathrm{d}x$. (utiliser des sommes de Riemann.)
2. Montrer que : $\forall\, u \in [0, a], \forall\, v \in [0, b]$, $\quad uv \le \displaystyle\int_0^u f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^v g(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Soit f une application continue sur $[0, 1]$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^k f(\frac{k}{n}) = 0$.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Soient f et g deux applications continues sur $[0, 1]$.

Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\Big(\frac{k}{n}\Big) g\Big(\frac{k+1}{n}\Big) = \int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$, avec $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2 + kn}}$.

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Soit f une application de classe $\mathcal{C}^3$ sur $[a, b]$, et $n \in \mathbb{N}^*$.

On pose $M_3 = \sup\limits_{[a,b]} \big|f^{(3)}\big|$ et $S_n(f) = \dfrac{b-a}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\Big(\frac{k}{n}\Big)$.

On définit de même les sommes $S_n(f')$ et $S_n(f'')$.

1. Montrer que $\displaystyle\Big|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - S_n(f) - \frac{b-a}{2n} S_n(f') - \frac{(b-a)^2}{6n^2} S_n(f'')\Big| \le \frac{(b-a)^4}{24n^3} M_3$
2. Prouver que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = S_n(f) + \frac{b-a}{2n}(f(b) - f(a)) - \frac{(b-a)^2}{12n^2}(f'(b) - f'(a)) + \mathrm{O}\Big(\frac{1}{n^3}\Big)$

Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

1. Pour $n \geq 1$ fixé, et pour $0 \leq k \leq n$, poser $x_k = \dfrac{ka}{n}$ et $y_k = f(x_k)$.

   Considérer $S_n = \dfrac{a}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$ et $S'_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(y_{k+1} - y_k)g(y_k)$.

   Il est clair que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S'_n = \int_0^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

   Établir ensuite que $S_n + S'_n = ab$, et conclure.

2. Vérifier que $\displaystyle\int_0^u f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^v g(x)\,\mathrm{d}x - uv = \int_{f(u)}^v (g(x) - u)\,\mathrm{d}x \geq 0$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

Ecrire $S_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k f(\frac{k}{n}) = \frac{1}{2}(S'_n - S''_n)$ en séparant les indices pairs des indices impairs.

Constater que S'_n et S''_n sont deux sommes de Riemann de f sur $[0, 1]$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

Poser $S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\Big(\frac{k}{n}\Big)g\Big(\frac{k+1}{n}\Big)$ et $T_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\Big(\frac{k}{n}\Big)g\Big(\frac{k}{n}\Big)$.

Utiliser l'uniforme continuité de g pour montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(S_n - T_n) = 0$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

S_n est une somme de Riemann de $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ sur $[0, 1]$. On trouve $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = 2(\sqrt{2} - 1)$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [Retour à l'énoncé]

1. Poser $x_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$, avec $k \in \{0, \ldots, n-1\}$.

   Appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à f entre x_k et x, avec $x \in [x_k, x_{k+1}]$.

   Intégrer terme à terme avant de sommer de $k = 0$ à $k = n - 1$.

2. La question précédente donne un DL de $S_n(f)$.

   Utiliser des DL analogues (mais de précision moindre) pour $S_n(f')$ et $S_n(f'')$.

Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

1. Soit n un entier positif. On pose $x_k = \dfrac{ka}{n}$ et $y_k = f(x_k)$, pour tout k de $\{0, \ldots, n\}$.

   Les x_k forment une subdivision régulière σ de $[0, a]$. La fonction f étant croissante, les y_k forment une subdivision (à priori non régulière) de $[0, b]$ (on rappelle que $f(0) = 0$).

   On considère les sommes de Riemann $S_n = \dfrac{a}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$ et $S'_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(y_{k+1} - y_k)g(y_k)$.

   Lorsque $n \to \infty$, la somme S_n tend vers $\displaystyle\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

   f étant continue sur le segment $[0, 1]$, elle y est uniformément continue (Th de Heine.)

   Il en découle que le "pas" de la subdivision σ' tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$.

   On en déduit que S'_n tend vers $\displaystyle\int_0^b g(x)\,\mathrm{d}x$ quand $n \to +\infty$. D'autre part :

   $$\begin{aligned} S_n + S'_n &= \frac{a}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k + \sum_{k=0}^{n-1}(y_{k+1} - y_k)x_k = \frac{a}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k + \sum_{k=0}^{n-1} x_k y_{k+1} - \sum_{k=0}^{n-1} x_k y_k \\ &= \frac{a}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k + \sum_{k=1}^{n} x_{k-1}y_k - \sum_{k=0}^{n-1} x_k y_k = \sum_{k=1}^{n-1}\underbrace{\Bigl(\frac{a}{n} - x_k + x_{k-1}\Bigr)}_{=0} y_k + \Bigl(\frac{a}{n} + x_{n-1}\Bigr)b = ab \end{aligned}$$

   Quand $n \to \infty$, l'égalité $S_n + S'_n = ab$ donne donc $\displaystyle\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^b g(x)\,\mathrm{d}x = ab$.

2. On se donne $u \in [0, a]$ et $v \in [0, b]$.

   D'après la question précédente, on a $\displaystyle\int_0^u f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{f(u)} g(x)\,\mathrm{d}x = uf(u)$. Ainsi :

   $$\begin{aligned} \int_0^u f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^v g(x)\,\mathrm{d}x - uv &= \int_0^u f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{f(u)} g(x)\,\mathrm{d}x + \int_{f(u)}^v g(x)\,\mathrm{d}x - uv \\ &= u(f(u) - v) + \int_{f(u)}^v g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{f(u)}^v (g(x) - u)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

   Rappelons que l'application g, tout comme f, est croissante.

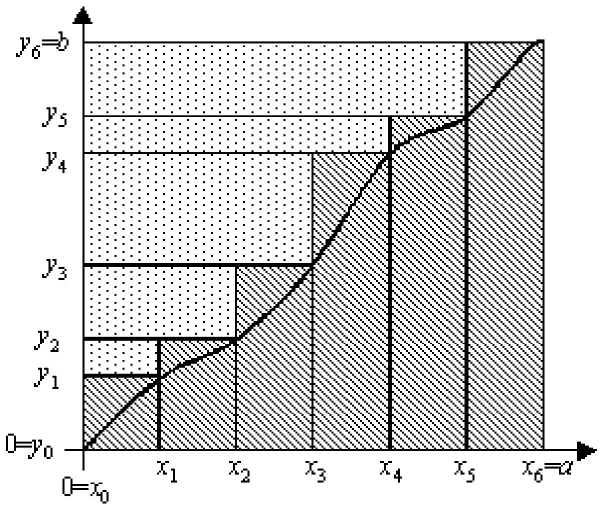
   – Si $f(u) \le v$, alors $u \le g(x) \le g(v)$ sur $[f(u), v]$.

   – Si $v \le f(u)$, alors $g(v) \le g(x) \le u$ sur $[v, f(u)]$.

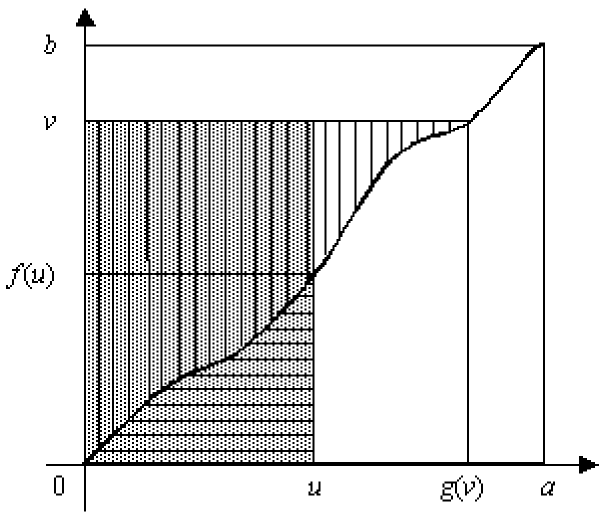
   Dans tous les cas, on a donc $\displaystyle\int_{f(u)}^v (g(x) - u)\,\mathrm{d}x \ge 0$.

   Compte tenu du calcul précédent, on en déduit $\displaystyle\int_0^u f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^v g(x)\,\mathrm{d}x \ge uv$.

3. Le schéma ci-dessous illustre l'idée de la démonstration de la première question.
   On y voit la subdivision (x_k) de $[0, a]$, ainsi que la subdivision (y_k) de $[0, b]$.
   La somme de Riemann S_6 de f est représenté par des hachures obliques.
   La somme de Riemann S'_6 de g est représentée par un nuage de points.
   On voit bien comment les sommes S_6 et S'_6 s'emboîtent de telle sorte que $S_6 + S'_6 = ab$.



   Quand $n \to \infty$ on devine que S_n et S'_n tendent respectivement vers l'intégrale de f sur $[0, a]$ (aire du domaine situé sous la courbe $y = f(x)$ et dans le rectangle $[0, a] \times [0, b]$) et vers l'intégrale de $g = f^{-1}$ sur $[0, b]$ (aire du domaine situé au-dessus de la courbe $y = f(x)$ et dans le rectangle $[0, a] \times [0, b]$). Le fait que la somme des deux aires soit égale à ab est aussi particulièrement évident sur ce graphique.
   Le dessin ci-dessous illustre la question 2. On s'est placé ici dans le cas $v \geq f(u)$. L'intégrale de f sur $[0, v]$ est hachurée horizontalement. Celle de g sur $[0, v]$ est hachurée verticalement. On voit que la somme de ces deux aires dépasse uv (le rectangle grisé.)



Corrigé de l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

On sépare $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k f(\frac{k}{n})$ en deux sommes, en fonction de la parité de l'indice k.

Ainsi $S_n = \frac{1}{2}(S'_n - S''_n)$, avec $S'_n = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n/2} f(\frac{2k}{n})$ et $S''_n = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{(n-1)/2} f(\frac{2k+1}{n})$.

Or S'_n et S''_n sont deux sommes de Riemann de f sur $[0,1]$.

On a donc $\lim\limits_{n\to\infty} S'_n = \lim\limits_{n\to\infty} S''_n = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$. Il en découle $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 0$.

Corrigé de l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

Posons $S_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\Big(\dfrac{k}{n}\Big) g\Big(\dfrac{k+1}{n}\Big)$ et $T_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\Big(\dfrac{k}{n}\Big) g\Big(\dfrac{k}{n}\Big)$.

On sait que $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = \int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$. Il reste donc à montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}(S_n - T_n) = 0$.

On constate que $S_n - T_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\Big(\dfrac{k}{n}\Big)\Big(g\Big(\dfrac{k+1}{n}\Big) - g\Big(\dfrac{k}{n}\Big)\Big)$.

Donnons-nous $\varepsilon > 0$. L'application g étant continue sur le segment $[0,1]$, elle y est uniformément continue (théorème de Heine.)

Ainsi il existe un réel $\alpha > 0$ tel que : $\forall (x,y) \in [0,1]^2,\ |x-y| \leq \alpha \Rightarrow |g(x) - g(y)| \leq \varepsilon$.

On en déduit que si $n \geq \dfrac{1}{\alpha}$, alors on a : $\forall k \in \{0,\ldots,n-1\},\ \Big|g\Big(\dfrac{k+1}{n}\Big) - g\Big(\dfrac{k}{n}\Big)\Big| \leq \varepsilon$.

Ainsi $n \geq \dfrac{1}{\alpha} \Rightarrow |S_n - T_n| \leq \varepsilon U_n$, avec $U_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\Big|f\Big(\dfrac{k}{n}\Big)\Big|$.

Mais la suite (U_n) converge vers $\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x$: cette suite est donc bornée.

Il existe donc $M \geq 0$ et un entier $n \geq n_0$ tels que : $n \geq n_0 \Rightarrow |S_n - T_n| \leq M\varepsilon$.

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty}(S_n - T_n) = 0$, et finalement $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\Big(\dfrac{k}{n}\Big) g\Big(\dfrac{k+1}{n}\Big) = \int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$.

Corrigé de l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

On constate que $S_n = \sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+kn}} = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}}$.

On en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x}} = \Big[2\sqrt{1+x}\Big]_0^1 = 2(\sqrt{2}-1)$

Corrigé de l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

1. Pour simplifier les notations posons $x_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$, avec $k \in \{0, \ldots, n-1\}$.

   On peut écrire $R_n(f) = \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(x) - f(x_k))\,\mathrm{d}x$

   On applique Taylor-Lagrange entre x_k et x, avec $x \in [x_k, x_{k+1}]$:
   $$\Big|f(x) - f(x_k) - (x - x_k)f'(x_k) - \frac{(x-x_k)^2}{2}f''(x_k)\Big| \le \frac{(x-x_k)^3}{6}M_3$$
   On procède ensuite à une intégration sur $[x_k, x_{k+1}]$. On trouve
   $$\Big|\int_{x_k}^{x_{k+1}}\Big(f(x) - f(x_k) - (x-x_k)f'(x_k) - \frac{(x-x_k)^2}{2}f''(x_k)\Big)\,\mathrm{d}x\Big| \le \frac{M_3}{6}\int_{x_k}^{x_{k+1}}(x-x_k)^3\,\mathrm{d}x$$
   Autrement dit, compte tenu de ce que $x_{k+1} - x_k = \dfrac{b-a}{n}$:
   $$\Big|\int_{x_k}^{x_{k+1}}(f(x) - f(x_k))\,\mathrm{d}x - \frac{(b-a)^2}{2n^2}f'(x_k) - \frac{(b-a)^3}{6n^3}f''(x_k)\Big| \le \frac{(b-a)^4}{24n^4}M_3$$
   On en déduit, par sommation de $k = 0$ à $k = n-1$:
   $$\Big|\sum_{k=0}^{n-1}\Big(\int_{x_k}^{x_{k+1}}(f(x) - f(x_k))\,\mathrm{d}x - \frac{(b-a)^2}{2n^2}f'(x_k) - \frac{(b-a)^3}{6n^3}f''(x_k)\Big)\Big| \le \frac{(b-a)^4}{24n^3}M_3$$
   Posons $S_n(f) = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}f(x_k)$, $S_n(f') = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}f'(x_k)$ et $S_n(f'') = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}f''(x_k)$.

   L'inégalité précédente devient :
   $$\Big|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - S_n(f) - \frac{b-a}{2n}S_n(f') - \frac{(b-a)^2}{6n^2}S_n(f'')\Big| \le \frac{(b-a)^4}{24n^3}M_3$$

2. Ainsi $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = S_n(f) + \frac{b-a}{2n}S_n(f') + \frac{(b-a)^2}{6n^2}S_n(f'') + \mathrm{O}\Big(\frac{1}{n^3}\Big)$.

   En agissant sur f' (à un rang moindre) et sur f'' (à un rang moindre encore), on trouve :
   $$\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = S_n(f') + \frac{b-a}{2n}S_n(f'') + \mathrm{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big) \quad \text{et} \quad \int_a^b f''(x)\,\mathrm{d}x = S_n(f'') + \mathrm{O}\Big(\frac{1}{n}\Big)$$
   Ainsi $S_n(f'') = \displaystyle\int_a^b f''(x)\,\mathrm{d}x + \mathrm{O}\Big(\frac{1}{n}\Big)$ et $S_n(f') = \displaystyle\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x - \frac{b-a}{2n}\int_a^b f''(x)\,\mathrm{d}x + \mathrm{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$

   On en déduit :
   $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = S_n(f) + \frac{b-a}{2n}\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x - \frac{(b-a)^2}{12n^2}\int_a^b f''(x)\,\mathrm{d}x + \mathrm{O}\Big(\frac{1}{n^3}\Big)$$
   Finalement : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = S_n(f) + \frac{b-a}{2n}(f(b) - f(a)) - \frac{(b-a)^2}{12n^2}(f'(b) - f'(a)) + \mathrm{O}\Big(\frac{1}{n^3}\Big)$