ECRICOME
VISER PLUS HAUT

CONCOURS D'ADMISSION 2013

2

Mathématiques

Option Economique

Mercredi 17 avril 2013 de 8h00 à 12h00

Durée : 4 heures

Candidats bénéficiant de la mesure "Tiers-temps" :
8h00 – 13h20

Aucun document n'est autorisé.
Aucun instrument de calcul n'est autorisé.

L'énoncé comporte 6 pages.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé et à donner des démonstrations complètes - mais brèves - de leurs affirmations.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Tournez la page s.v.p.

ECRICOME
VISER PLUS HAUT

EXERCICE 1

On désigne par $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille 3 à coefficients réels et par 0_3 la matrice nulle de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -9 & 6 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ ainsi que le polynôme R défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad R(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3.$$

Pour tout réel λ, on pose $X_\lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix}$. Pour finir, on introduit l'application f définie par :

$$\forall M \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R}), \quad f(M) = AM + MA.$$

1. Montrer que R' (la dérivée de R) admet deux racines réelles distinctes r_1, r_2 avec $r_1 < r_2$ que l'on précisera.

2. Dresser le tableau de variations de R en y ajoutant les valeurs de R en r_1 et r_2.

3. Justifier que R admet trois racines a, b, c avec $0 < a < r_1 < b < r_2 < c$. *On ne cherchera pas à calculer ces racines.*

4. Soit λ un réel, calculer AX_λ puis démontrer que X_λ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ si et seulement si $R(\lambda) = 0$.

5. Etablir l'existence d'une matrice inversible P et d'une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$. Expliciter les matrices P et D en fonction des réels a, b, c.

6. Prouver que f est une application linéaire et que :
$$\forall M \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R}), \quad f(M) = 0_3 \Leftrightarrow DM' + M'D = 0_3.$$
où l'on a posé $M' = P^{-1}MP$.

7. Soit $N = \begin{pmatrix} p & q & r \\ s & t & u \\ v & w & x \end{pmatrix}$. Déterminer les neuf coefficients de la matrice $DN + ND$. Que dire de N si $DN + ND = 0_3$?

8. Démontrer que f est un isomorphisme.

EXERCICE 2

On considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi(x) = \frac{x\ln(x) - 1}{x}.$$

ainsi que la fonction numérique f des variables réelles x et y définie par :

$$\forall (x, y) \in]0, +\infty[\times]0, +\infty[, \quad f(x, y) = \frac{1}{x^2} - \frac{y}{x} + \frac{y^2}{2} + \exp\left(-\frac{1}{x}\right)$$

où exp désigne la fonction exponentielle.

I. Etude des zéros de φ.

1. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs positives. Interpréter graphiquement cette limite.

2. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$, ainsi que la limite de $\dfrac{\varphi(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$. Interpréter graphiquement cette limite.

3. Justifier la dérivabilité de φ sur $\mathbb{R}_+^*$ et déterminer sa dérivée.

4. Dresser le tableau de variation de φ en faisant apparaître les limites de φ en 0^+ et $+\infty$.

5. Prouver l'existence d'un unique réel $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\varphi(\alpha) = 0.$$

   Justifier que $\alpha \in [1, e]$.

II. Etude d'une suite réelle.

On considère la suite u définie par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} u_0 = e \, ; \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \varphi(u_n) + u_n. \end{cases}$$

1. Démontrer que pour tout entier n, u_n existe et $u_n > \alpha$.

2. Si cette suite est convergente de limite L, que peut valoir L ?

3. Prouver que la suite u est strictement croissante.

Tournez la page s.v.p.

4. La suite u est-elle convergente ?

5. Soit A un réel. Recopier et compléter le programme suivant afin qu'il affiche le plus petit entier n tel que $u_n \geqslant A$:

```
program ecricome2013 ;
var n : integer ;
      u : real ;
      A : real ;
   function g(x : real) : real ;
   begin
   g := ..................;
   end;
begin
      writeln('entrer un réel A >0') ;
      readln(A) ;
      u:=exp(1) ; n:=0 ;
      while .................. do
         begin
            ..................;
            ..................;
         end ;
writeln( ..................) ;
end.
```

III. Extrema de f sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$.

1. Justifier que f est de classe C^2 sur l'ouvert $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$.

2. Calculer les dérivées partielles premières et prouver que f possède un unique point critique noté A d'abscisse α et d'ordonnée y_α à déterminer en fonction de α.

3. Calculer les dérivées partielles secondes sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ et établir que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\alpha, y_\alpha) = \frac{2\alpha+1}{\alpha^5}.$$

4. La fonction f présente-t-elle un extremum local en A sur l'ouvert $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$? Si oui, en donner sa nature (maximum ou minimum).

ECRICOME
VISER PLUS HAUT

EXERCICE 3

Soient n et b deux entiers avec $n \geqslant 1$ et $b \geqslant 2$. On considère une urne contenant n boules noires et b boules blanches, toutes indiscernables.

Un joueur A effectue des tirages successifs d'une boule **sans remise** dans l'urne jusqu'à obtenir une boule blanche.
Il laisse alors la place au joueur B qui effectue des tirages successifs d'une boule **avec remise** dans l'urne jusqu'à obtenir une boule blanche.

On note X la variable aléatoire réelle égale au nombre de boules noires tirées par A avant de tirer une boule blanche et on appelle Y la variable aléatoire réelle égale au nombre de boules noires tirées par B avant de tirer une boule blanche (s'il ne reste plus de boule noire, on a donc $Y = 0$).

Par exemple, si $n = 3$ et $b = 7$ et que les tirages successifs ont donné une boule : « noire, blanche, noire, noire, noire, noire, blanche » alors :

- A a effectué deux tirages, il a retiré une boule noire puis une boule blanche de l'urne ;
- l'urne contient maintenant 8 boules dont deux noires et six blanches ;
- B a effectué ensuite cinq tirages dans cette urne, il a pioché 4 boules noires qu'il a reposé dans l'urne après chaque tirage puis il a pioché une boule blanche ;
- X vaut 1 et Y vaut 4.

I. Etude d'un cas particulier $b = n = 2$.

Pour ce cas particulier on pourra s'aider d'un arbre pondéré.
On suppose donc ici que l'urne contient initialement 2 boules blanches et 2 boules noires.

1. Donner les probabilités des événements : $[X = 0]$, $[X = 1]$, $[X = 2]$.
2. En déduire l'espérance et la variance de X.
3. Montrer que la probabilité de l'événement $[Y = 0]$ est donnée par :
$$P([Y = 0]) = \frac{1}{2}.$$
4. Pour tout entier i naturel non nul, déterminer les probabilités suivantes :
$$P([X = 0] \cap [Y = i]), \quad P([X = 1] \cap [Y = i]), \quad P([X = 2] \cap [Y = i]).$$

Tournez la page s.v.p.

5. En déduire la loi de Y. Uniquement à l'aide de l'expression de $P([Y = i])$ en fonction de i, vérifier que :

$$\sum_{i=0}^{+\infty} P([Y = i]) = 1.$$

6. Montrer que Y admet une espérance et la calculer.

II. Retour au cas général.

1. Pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, calculer la probabilité $P([X = k])$ puis vérifier que :

$$P([X = k]) = \frac{\binom{n-k+b-1}{b-1}}{\binom{n+b}{b}}.$$

2. Utiliser la question qui précède pour justifier que :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{k+b-1}{b-1} = \binom{n+b}{b}.$$

Par conséquent, on vient de démontrer la formule suivante :

$$(\mathcal{S}) : \forall N \in \mathbb{N}, \quad \forall a \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{N} \binom{k+a}{a} = \binom{N+a+1}{a+1}$$

3. Soient $k \geqslant 1$, $N \geqslant 1$ et $a \in \mathbb{N}$. Comparer $k\binom{k+a}{a}$ et $(a+1)\binom{k+a}{a+1}$ puis justifier que :

$$\sum_{k=0}^{N} k\binom{k+a}{a} = (a+1)\sum_{k=0}^{N-1} \binom{k+a+1}{a+1}.$$

4. A l'aide des questions précédentes, montrer que l'espérance de la variable $n - X$ est donnée par :

$$E(n - X) = \frac{bn}{b+1}.$$

En déduire l'espérance $E(X)$ de X.

5. Pour tout k de $X(\Omega)$, et pour tout entier i non nul, déterminer la probabilité suivante :
$$P([X = k] \cap [Y = i]).$$

6. Pour tout k de $X(\Omega)$, et pour tout entier i, non nul, justifier que la série $\displaystyle\sum_{i \geqslant 1} i \left(\frac{n-k}{n+b-k-1}\right)^{i-1}$ est convergente et déterminer sa somme.

7. Montrer que Y admet une espérance et vérifier que :
$$E(Y) = \frac{bn}{b^2 - 1}.$$

ANNALES DE MATHEMATIQUES 2013

ECRICOME 2013 VOIE E

CORRIGE

EXERCICE I

1)

$\forall x \in \mathbb{R},\ R(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$. Il est clair que R est dérivable (c'est une fonction polynomiale) ;

$\forall x \in \mathbb{R},\ R'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3)$. Le trinôme $x^2 - 4x + 3$ a une racine évidente $x = 1$, il se factorise par $x - 1$ et l'on a facilement $x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$.

$$\boxed{R' \text{ admet 2 racines : } r_1 = 1 \text{ et } r_2 = 3}$$

2)

$R'(x)$ est du signe de $(x-1)(x-3)$; il est positif à l'extérieur de l'intervalle $[1, 3]$. D'où le tableau de variations de R.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$R'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
R	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Explication des limites : $R(x) \underset{(\pm\infty)}{\sim} x^3$ (un polynome équivaut en l'infini à son terme de plus haut degré), donc $\lim\limits_{x\to-\infty} R(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} R(x) = +\infty$.

$R(1) = 1 - 6 + 9 - 3 = 1$ et $R(3) = 27 - 6 \times 9 + 9 \times 3 - 3 = 27 - 54 + 27 - 3 = -3$.

3)

- Sur l'intervalle $]-\infty, 1[$, la fonction R est continue, strictement croissante ; elle réalise une bijection de cet intervalle sur son image $]-\infty, 1[$ d'après le tableau de variations (on pouvait dire aussi que son image est $]\lim\limits_{x\to-\infty} R(x), R(1)[$ par la stricte croissante et la continuité de R sur $]-\infty, 1[$).

0 appartient à l'image $]-\infty, 1[$, donc il existe un unique réel $a \in]-\infty, 1[$ tel que $R(a) = 0$. On remarque que $R(0) = -3$, on a donc $R(0) < R(a) < R(1)$, ce qui équivaut à $0 < a < 1$ par la stricte croissance de R.

- Sur l'intervalle $]1, 3[$, la fonction R est continue, strictement décroissante ; elle réalise une bijection de cet intervalle sur son image $]-3, 1[$ d'après le tableau de variations.

0 appartient à l'image $]-3, 1[$, donc il existe un unique réel $b \in]1, 3[$ tel que $R(b) = 0$.

- De même, R réalise une bijection de $]3,+\infty[$ sur son image $]-3,+\infty[$. Il existe donc un unique réel $c \in]3,+\infty[$ tel que $R(c)=0$.

$$\boxed{\text{L'équation } R(x) \text{ admet 3 racines } a,b,c \text{ telles que } 0<a<r_1<b<r_2<c}$$

4)

$AX_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -9 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda^2 \\ 6\lambda^2-9\lambda+3 \end{pmatrix}$.

La colonne X_λ n'est pas nulle, donc X_λ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ si et seulement si $AX_\lambda = \lambda X_\lambda$, ce qui équivaut successivement à

$\begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda^2 \\ 6\lambda^2-9\lambda+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda^2 \\ \lambda^3 \end{pmatrix}$;

$\begin{cases} \lambda & = \lambda \\ \lambda^2 & = \lambda^2 \\ 6\lambda^2-9\lambda+3 & = \lambda^3 \end{cases}$;

$\lambda^3 = 6\lambda^2-9\lambda+3$.

$$\boxed{\text{Le vecteur } \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix} \text{ est vecteur propre de } A \text{ associé à } \lambda \text{ si et seulement si } R(\lambda)=0}$$

5)

On conclut que le vecteur X_λ est vecteur propre de A si et seulement si $\lambda \in \{a,b,c\}$ d'après la question précédente.

La matrice A admet " déjà " a,b,c pour valeurs propres. Les nombres a,b,c étant distincts, A admet 3 valeurs propres distinctes ; or A appartient à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, donc elle n'admet pas d'autres valeurs propres : en effet, on peut rappeler qu'une matrice carrée d'ordre n admet au plus n valeurs propres distinctes.

> $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ admet 3 valeurs propres distinctes : elle est diagonalisable (c'est une condition suffisante de diagonalisabilité)

On peut remarquer que les trois sous-espaces propres sont de dimension 1. Si l'on note $E(\lambda, A)$ le sous-espace propre de A associé à λ, on sait que X_λ appartient à $E(\lambda, A)$, il est non nul, donc il en forme une base :

$$\forall \lambda \in \{a,b,c\},\ E(\lambda,A) = \mathrm{vect}(X_\lambda)$$

> Posons $D = \mathrm{Diag}(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$.
>
> On sait, d'après le cours, que la matrice P est inversible et que
>
> $D = P^{-1}AP$ ce qui équivaut à $A = PDP^{-1}$

6)

- $\forall M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ AM+MA \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (propriétés classiques des opérations matricielles)

$\forall (M,N) \in (\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))^2,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(M+\alpha N) &= A(M+\alpha N)+(M+\alpha N)A = AM+\alpha AN+MA+\alpha NA \\ &= (AM+MA)+\alpha(AN+NA) = f(M)+\alpha f(N) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'application } f \text{ est un endomorphisme de } \mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$$

- $M' = P^{-1}MP \iff M = PM'P^{-1}$ (résultat classique du cours).

$$\begin{aligned} AM + MA = 0_3 &\iff PDP^{-1}PM'P^{-1} + PM'P^{-1}PDP^{-1} = 0_3 \\ &\iff PDM'P^{-1} + PM'DP^{-1} = 0_3 \\ &\quad \text{(car } PP^{-1} = P^{-1}P = I_3, \text{ matrice unité de } \mathcal{M}_3(\mathbb{R})) \end{aligned}$$

Multiplions les deux termes de l'égalité précédente par P^{-1} à gauche et P à droite ; il vient

$$\begin{aligned} PDM'P^{-1} + PM'DP^{-1} = 0_3 &\implies P^{-1}(PDM'P^{-1} + PM'DP^{-1})P = P^{-1}0_3P \\ &\implies P^{-1}PDM'P^{-1}P + P^{-1}PM'DP^{-1}P = 0_3 \\ &\implies DM' + M'D = 0_3 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } AM + MA = 0_3 \implies DM' + M'D = 0_3$$

De même,

$$\begin{aligned} DM' + M'D = 0_3 &\iff P^{-1}APP^{-1}MP + P^{-1}MPP^{-1}AP = 0_3 \\ &\iff P^{-1}AMP + P^{-1}MA = 0_3 \end{aligned}$$

En multipliant les deux termes de cette égalité par P à gauche et P^{-1} à droite, on trouvera, avec le mêmes calculs que précédemment $AM + MA = 0_3$. Finalement,

$$\boxed{AM + MA = 0_3 \iff DM' + M'D = 0_3 \text{ avec } M' = P^{-1}MP}$$

7)

$$\begin{aligned} DN + ND &= \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q & r \\ s & t & u \\ v & w & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p & q & r \\ s & t & u \\ v & w & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ap & aq & ar \\ bs & bt & bu \\ cv & cw & cx \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ap & bq & cr \\ as & bt & cu \\ av & bw & cx \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2ap & (a+b)q & (a+c)r \\ (a+b)s & 2bt & (b+c)u \\ (a+c)v & (b+c)w & 2cx \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$DN + ND = 0_3 \iff \begin{cases} 2ap = 0 & ; & (a+b)q = 0 & ; & (a+c)r = 0 \\ (a+b)s = 0 & ; & 2bt = 0 & ; & (b+c)u = 0 \\ (a+c)v = 0 & ; & (b+c)w = 0 & ; & 2cx = 0 \end{cases}$$

D'après la question 3), $a, b, c > 0$, donc $a+b, a+c, b+c$ également et par suite le système précédent èquivaut à $p = q = r = s = t = u = v = w = x = 0$.

$$\boxed{DN + ND = 0_3 \iff N = 0_3}$$

8)

Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} f(M) = 0_3 &\iff AM + MA = 0_3 \\ &\iff DM' + M'D = 0_3 \quad \text{d'après la question 6)} \\ &\iff M' = 0_3 \quad \text{d'après la question précédente} \end{aligned}$$

Or $M = PM'P^{-1}$; il en résulte que $f(M) = 0_3 \implies M = 0_3$. L'implication réciproque étant évidente, nous venons de montrer que :

$M \in \operatorname{Ker} f \iff M = 0_3$, c'est-à-dire $\operatorname{Ker} f = \{0_3\}$. L'endomorphisme f de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est injectif ; $\dim \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) = 9$, donc d'après les équivalences classiques, f est bijectif.

$$\boxed{f \text{ est un isomorphisme de } \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \text{ ; en fait c'est un automorphisme de } \mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$$

EXERCICE II

I. Etude des zéros de φ

I–1)

$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0$ par croissances comparées, donc $\lim_{x\to 0^+}(x\ln x - 1) = -1$.

$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, donc $\lim_{x\to 0^+} \frac{x\ln x - 1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}(x\ln x - 1) = -\infty$: la courbe représentative de la fonction φ admet l'axe des ordonnées comme asymptote " verticale " ;

I–2)

$\forall x > 0,\ \varphi(x) = \ln x - \frac{1}{x}$; $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ implique $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty$.

$\forall x > 0,\ \frac{\varphi(x)}{x} = \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x^2}$; $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ par croissances comparées, donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = 0$.

La courbe représentative de la fonction φ admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$.

I–3)

La fonction $x \mapsto x\ln x$ est continue, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que produit de fonctions continues, dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$.

La fonction $x \mapsto x\ln x - 1$ est continue, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que somme de fonctions continues, dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$.

La fonction φ est continue, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que quotient de fonctions continues, dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$, dont le dénominateur ne s'annule pas.

$\forall x > 0,\ \varphi'(x) = \frac{x(1+\ln x) - (x\ln x - 1)}{x^2} = \frac{x+1}{x^2} > 0.$

I–4)

Tableau de variations de φ :

x	0		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$+$	
φ	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

I–5)

La fonction est continue, strictement croissante sur $]0,+\infty[$; elle réalise une bijection de cet intervalle sur son image $]-\infty,+\infty[$ d'après le tableau de variations.

0 appartient à $]-\infty,+\infty[$, donc

il existe un unique réel α tel que $\varphi(\alpha) = 0$

$\varphi(1) = -1 < 0$; $\varphi(e) = \frac{e-1}{e} > 0$; on a donc $\varphi(1) < \varphi(\alpha) < \varphi(e)$. Par la stricte croissance de φ, cet encadrement équivaut à $1 < \alpha < e$.

En résumé,

$$\boxed{\text{Il existe un unique réel } \alpha \text{ tel que } 1 < \alpha < e \text{ et } \varphi(\alpha) = 0}$$

II. Etude d'une suite réelle

II–1)

Soit P_n la propriété : " u_n existe et $u_n > \alpha$ ". Faisons une démonstration par récurrence.

u_0 existe et $u_0 > \alpha$ car $u_0 = e$ par hypothèse et $e > \alpha$ d'après la question I–5)

Supposons que la propriété P_n soit satisfaite pour un entier naturel n donné.

$u_n > 0 \Longrightarrow \varphi(u_n)$ existe, donc u_{n+1} existe. De plus $u_n > \alpha \Longrightarrow \varphi(u_n) > \varphi(\alpha)$ par la stricte croissance de φ ; on a donc $\varphi(u_n) > 0$ d'après la question I–5).

$u_{n+1} = \varphi(u_n) + u_n > u_n$ (car $\varphi(u_n) > 0$) ; or $u_n > \alpha$ d'après l'hypothèse de récurrence, donc $u_{n+1} > \alpha$.

La propriété P_{n+1} est satisfaite ; la propriété P_n est héréditaire et, par principe du raisonnement par récurrence, nous pouvons affirmer

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \text{ existe et } u_n > \alpha}$$

II–2)

Si la suite (u_n) converge vers un réel L, alors $u_n > \alpha \Longrightarrow L \geq \alpha$. On aura donc $L > 0$.

Par continuité de la fonction φ au point L appartenant à $\mathbb{R}_+^*$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi(u_n) = \varphi(L)$.

Or $u_{n+1} = \varphi(u_n)+u_n$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \varphi(u_n) + \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ ce qui donne $L = \varphi(L)+L$, soit $\varphi(L) = 0$ et finalement $L = \alpha$

$$\boxed{\text{Si la suite } (u_n) \text{ converge vers un réel } L, \text{ alors } L = \alpha}$$

II–3)

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = \varphi(u_n)$; or $u_n > \alpha$ d'après la question II–1) et φ strictement croissante, donc $\varphi(u_n) > 0$ et par suite $u_{n+1} - u_n > 0$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n < u_{n+1} : \text{la suite } (u_n) \text{ est strictement croissante}}$$

II–4)

Par hypothèse, $u_0 = e$; par croissance de la suite (u_n), $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq u_0 = e$.

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq e \Longrightarrow L \geq e > \alpha$. On a donc $L > \alpha$ ce qui est impossible d'après la question II–3). La suite (u_n) ne peut pas être convergente.

$$\boxed{(u_n) \text{ est croissante et divergente, donc } \lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$$

On peut rappeler la situation ; pour une suite croissante il n'y a que deux possibilités :

ou elle est majorée et elle converge, ou elle n'est pas majorée et (puisqu'elle est croissante) elle a pour limite $+\infty$.

II–5)

```
PROGRAM ECRICOME2013 ;
var n : integer ; u, A : real ;
function g(x : real ) : real ;
begin g := (x*ln (x))-1)/x +x ;
end ;
BEGIN
```

```
writeln('entrer un réel A > 0') ;

readln(A) ;

u := exp(1) ; n :=0 ;

while (u < A) do begin u := g(u) ; n := n+1 ;

                end ;

writeln('le plus petit entier n tel que u>= A est ', n) ;

END.
```

III. Extrema de f sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$

III–1)

$$f(x,y) = \frac{1}{x^2} - \frac{y}{x} + \frac{y^2}{2} + \exp(-\frac{1}{x}) \text{ sur } (\mathbb{R}_+^*)^2.$$

On peut écrire $f(x,y) = \underbrace{\frac{2-2yx+x^2y2}{2x^2}}_{=\psi(x,y)} + \exp(-\frac{1}{x})$

La fonction ψ est de classe C^2 sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ comme fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas. La fonction $(x,y) \mapsto -\frac{1}{x}$ aussi pour les mêmes raisons. La fonction exponentielle est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, donc par composition, la fonction $(x,y) \mapsto \exp(-\frac{1}{x})$ est de classe C^2 sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

En tant que somme de fonctions de classe C^2 sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$,

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est de classe } C^2 \text{ sur } (\mathbb{R}_+^*)^2}$$

III–2)

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= -\frac{2}{x^3} + \frac{y}{x^2} + \frac{1}{x^2}\exp(-\frac{1}{x}) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= -\frac{1}{x} + y \end{aligned}$$

$$(x,y) \text{ est un point critique} \iff \begin{cases} -\frac{2}{x^3}+\frac{y}{x^2}+\frac{1}{x^2}\exp(-\frac{1}{x}) & =0 \\ -\frac{1}{x}+y & =0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \dfrac{-2+yx+x\exp(-\frac{1}{x})}{x^3} & =0 \\ y & =\frac{1}{x} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -2+yx+x\exp(-\frac{1}{x}) & =0 \\ y & =\frac{1}{x} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -2+1+x\exp(-\frac{1}{x}) & =0 \quad \text{car } yx=1 \\ y & =\frac{1}{x} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x\exp(-\frac{1}{x}) & =1 \\ y & =\frac{1}{x} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \ln x+\ln(\exp(-\frac{1}{x})) & =0 \\ y & =\frac{1}{x} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \ln x-\frac{1}{x} & =0 \\ y & =\frac{1}{x} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x\ln x-1 & =0 \\ y & =\frac{1}{x} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \varphi(x) & =0 \quad \text{car } x\ln x-1=x\varphi(x) \text{ et } x\neq 0 \\ y & =\frac{1}{x} \end{cases}$$

D'après la question I–5), $\varphi(x)=0$ et $x>0$ équivaut à $x=\alpha$, donc

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ admet un unique point critique : } A \text{ de coordonnées } (\alpha,\frac{1}{\alpha})}$$

III–3)

$$\forall (x,y)\in(\mathbb{R}_+^*)^2,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{6}{x^4}-\frac{2y}{x^3}-\frac{2}{x^3}\exp(-\frac{1}{x})+\frac{1}{x^4}\exp(-\frac{1}{x})$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\alpha,\frac{1}{\alpha}) = \frac{6}{\alpha^4}-\frac{2}{\alpha^4}-\frac{2}{\alpha^3}\exp(-\frac{1}{\alpha})+\frac{1}{\alpha^4}\exp(-\frac{1}{\alpha}) \qquad \mathbf{(1)}$$

Or $\varphi(\alpha)=0 \iff \alpha\ln\alpha=1 \iff \ln\alpha=\frac{1}{\alpha} \iff -\ln\alpha=-\frac{1}{\alpha} \iff \ln\frac{1}{\alpha}=-\frac{1}{\alpha}$; donc $\exp(-\frac{1}{\alpha})=\exp(\ln\frac{1}{\alpha})=\frac{1}{\alpha}$. L'égalité **(1)** devient :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\alpha,\frac{1}{\alpha})=\frac{4}{\alpha^4}-\frac{2}{\alpha^3}\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha^4}\frac{1}{\alpha}=\frac{2}{\alpha^4}+\frac{1}{\alpha^5}.$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\alpha,\frac{1}{\alpha})=\frac{2\alpha+1}{\alpha^5}}$$

III–4)

$$\forall (x,y)\in(\mathbb{R}_+^*)^2,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=1 \Longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\alpha,\frac{1}{\alpha})=1.$$

D'après le théorème de Schwarz (la fonction f est de classe C^2 sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ d'après la question III–1)), $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{1}{x^2} \Longrightarrow \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\alpha, \frac{1}{\alpha}) = \dfrac{1}{\alpha^2}$.

Utilisons les notations de Monge : $r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$; $s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

$(s^2 - rt)(\alpha, \frac{1}{\alpha}) = \dfrac{1}{\alpha^4} - \dfrac{2\alpha+1}{\alpha^5} = -\dfrac{\alpha+1}{\alpha^5} < 0$ puisque $\alpha > 0$. Il y a donc en ce point un extremum local pour f. De plus, $r(\alpha, \frac{1}{\alpha}) = \dfrac{2\alpha+1}{\alpha^5} > 0$, c'est un minimum.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ admet au point } A \text{ de coordonnées } (\alpha, \tfrac{1}{\alpha}) \text{ un minimum local}}$$

EXERCICE III

I. Etude d'un cas particulier $b = n = 2$

I–1)

L'événement $[X = 0]$ est l'événement " A a tiré une boule blanche au premier tirage ":

$P([X = 0]) = \boxed{\frac{1}{2}}$

L'événement $[X = 1]$ est l'événement " A a tiré une noire au premier tirage puis une blanche au second ".

Notons, pour $k \in \mathbb{N}^*$, N_k (resp B_k) l'événement " une noire (resp une blanche) a été tirée au $k^{\text{ème}}$ tirage.

$[X = 1] = N_1 \cap B_2$.

Par la formule des probabilités composées :

$P([X = 1]) = P(N_1) \times P_{(N_1)}(B_2) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \boxed{\frac{1}{3}}$

$[X = 2] = N_1 \cap N_2 \cap B_3$.

Donc $P([X = 2]) = P(N_1) \times P_{(N_1)}(N_2) \times P_{N_1 \cap N_2)}(B_3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times 1 = \boxed{\frac{1}{6}}$

I–2)

$E(X) = 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{6} = \boxed{\frac{2}{3}}$;

Par le théorème du transfert, $E(X^2) = 1 \times \frac{1}{3} + 4 \times \frac{1}{6} = 1$, donc par la formule de Köenig-Huygens, $V(X) = 1 - \frac{4}{9} = \boxed{\frac{5}{9}}$

I–3)

La famille $([X = k])_{0 \leq k \leq 2}$ est un système complet d'événements ; en effet, A effectue des tirages sans remise dans une urne qui contient 2 boules blanches et 2 boules noires, donc le nombre de boules noires tirées avant la première boule blanche est $0, 1$ ou 2.

$[Y = 0] = \quad ([X = 0] \cap [Y = 0]) \cup ([X = 1] \cap [Y = 0]) \cup ([X = 2] \cap [Y = 0])$

D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P([Y = 0]) &= P([X = 0])P_{[X=0]}([Y = 0]) + P([X = 1])P_{[X=1]}([Y = 0]) \\ &\qquad + P([X = 2])P_{[X=2]}([Y = 0]) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \times 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{P([Y=0]) = \frac{1}{2}}$$

Explication des probabilités conditionnelles.
Lorsque l'événement $[X = 0]$ est réalisé, on a tiré une boule blanche dans l'urne ; cette dernière contient donc une blanche et deux noires. La probabilité de tirer une blanche est donc $\frac{1}{3}$.

Lorsque l'événement $[X = 1]$ est réalisé, on a tiré une boule blanche et une noire dans l'urne ; cette dernière contient donc une blanche et une noire. La probabilité de tirer une blanche est donc $\frac{1}{2}$.

Lorsque l'événement $[X = 2]$ est réalisé, on a tiré une boule blanche et deux noires dans l'urne ; cette dernière contient une blanche. La probabilité de tirer cette blanche est donc 1

I–4)

- $P([X = 0] \cap [Y = i]) = P([X = 0])P_{[X=0]}(Y = i) = \frac{1}{2} \times (\frac{2}{3})^i \times \frac{1}{3}$.

En effet, lorsque l'événement $[X = 0]$ est réalisé, l'urne contient deux noires et une blanche et à partir de là, les tirages se font avec remise. Le joueur B effectue donc i tirages avec remise d'une boule noire (probabilité $\frac{2}{3}$) puis il tire une blanche (probabilité $\frac{1}{3}$). Ces $(i + 1)$ tirages ayant lieu avec remise, ils sont indépendants, d'où le résultat.

$$\boxed{\forall i \in \mathbb{N}^*,\ P([X = 0] \cap [Y = i]) = \frac{1}{6} \times (\frac{2}{3})^i}$$

- $P([X = 1] \cap [Y = i]) = P([X = 1])P_{[X=1]}(Y = i) = \frac{1}{3} \times (\frac{1}{2})^i \times \frac{1}{2}$.

En effet, lorsque l'événement $[X = 1]$ est réalisé, l'urne contient une noire et une blanche et à partir de là, les tirages se font avec remise. Le joueur B effectue donc i tirages avec remise d'une boule noire (probabilité $\frac{1}{2}$) puis il tire une blanche (probabilité $\frac{1}{2}$). Ces $(i+1)$ tirages ayant lieu avec remise, ils sont indépendants, d'où le résultat.

$$\boxed{\forall i \in \mathbb{N}^*,\ P([X = 1] \cap [Y = i]) = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{i+1}}$$

- $P([X = 2] \cap [Y = i]) = P([X = 2])P_{[X=2]}(Y = i) = \frac{1}{3} \times (\frac{1}{2})^i \times 0$.

En effet, lorsque l'événement $[X = 2]$ est réalisé, il n'y a plus de boules noires dans l'urne. Le joueur B ne peut donc en tirer i avec $i \geq 1$.

$$\boxed{\forall i \in \mathbb{N}^*,\ P([X = 2] \cap [Y = i]) = 0}$$

I–5)

$Y(\Omega) = \mathbb{N}$.

$P([Y = 0]) = \frac{1}{2}$ d'après la question I–3).

D'après la formule des probabilités totales appliquée à $[Y = i]$ avec $i \geq 1$ pour le système complet d'événements $([X = k])_{0\leq k\leq 2}$, on a

$$\begin{aligned} P([Y = i]) &= \frac{1}{6} \times (\frac{2}{3})^i + \frac{1}{3} \times (\frac{1}{2})^{i+1} \\ &= \frac{1}{6} \times (\frac{2}{3})^i + \frac{1}{6} \times (\frac{1}{2})^i \end{aligned}$$

$P([Y=i])$ apparaît comme la somme de deux séries géométriques de raisons $\frac{2}{3}$ et $\frac{1}{2}$ avec $\left|\frac{2}{3}\right| < 1$ et $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{+\infty} P([Y=i]) &= \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{6} \times (\frac{2}{3})^i + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{6} \times (\frac{1}{2})^i \\
&= \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{+\infty} (\frac{2}{3})^i + \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{+\infty} (\frac{1}{2})^i \\
&= \frac{1}{6} \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}} + \frac{1}{6} \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{6} \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} + \frac{1}{6} \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{6} \times 2 + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \\
\sum_{i=0}^{+\infty} P([Y=i]) &= P([Y=0]) + \sum_{i=1}^{+\infty} P([Y=i]) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{i=0}^{+\infty} P([Y=i]) = 1}$$

I–6)

Sous réserve de convergence $E(Y) = \sum_{i=0}^{+\infty} iP([Y=i]) = \sum_{\underline{i=1}}^{+\infty} iP([Y=i])$; la convergence absolue est superflue puisque la série est à termes positifs.

$$\begin{aligned}
iP([Y=i]) &= i\left(\frac{1}{6} \times (\frac{2}{3})^i + \frac{1}{6} \times (\frac{1}{2})^i\right) \\
&= \frac{1}{6} \times i(\frac{2}{3})^i + \frac{1}{6} \times i(\frac{1}{2})^i \\
&= \frac{1}{6} \times \frac{2}{3} \times i(\frac{2}{3})^{i-1} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} \times i(\frac{1}{2})^{i-1}
\end{aligned}$$

Il apparaît deux séries dérivées premières des séries géométriques de termes généraux $(\frac{2}{3})^i$ et $(\frac{1}{2})^i$ qui convergent d'après la question précédente :

Y admet une espérance et

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \frac{1}{6} \times \frac{2}{3} \sum_{i=1}^{+\infty} i(\frac{2}{3})^{i-1} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{+\infty} i(\frac{1}{2})^{i-1} \\
&= \frac{1}{9} \times \frac{1}{(1-\frac{2}{3})^2} + \frac{1}{12} \frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} \\
&= \frac{1}{9} \times \frac{1}{\frac{1}{9}} + \frac{1}{12} \times \frac{1}{\frac{1}{4}} \\
&= \frac{1}{9} \times 9 + \frac{1}{12} \times 4 = 1 + \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

$$\boxed{E(Y) = \frac{4}{3}}$$

II. Retour au cas général

II–1)

$[X=k]=A_k\cap B_{k+1}$ où l'événement A_k est " obtenir k boules noires au cours des k premiers tirages " (en fait $A_k=\bigcap_{i=1}^{k} N_i$ pour $k\geq 1$).

Nous supposerons dans un premier temps $k\geq 1$.

$$P([X=k])=P(A_k)P_{A_k}(B_{k+1})=\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n+b}{k}}\times\frac{b}{n+b-k}.$$

Explications : les k premiers tirages sont des tirages sans remise de k éléments indiscernables : c'est une situation hypergéométrique. La probabilité de A_k se calcule par quotient du nombre de tirages qui réalisent l'événement ($\binom{n}{k}$) et du nombre de cas possibles ($\binom{n+b}{k}$).

Quand l'événement A_k est réalisé, l'urne contient $n+b-k$ boules, dont b blanches puisque l'on n'a tiré que des noires, d'où le résultat.

$$\begin{aligned}
\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n+b}{k}}\times\frac{b}{n+b-k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!}\times\frac{k!(n+b-k)!}{(n+b)!}\times\frac{b}{n+b-k}\\
&= \frac{n!}{(n-k)!}\times\frac{(n+b-k)!}{(n+b)!}\times\frac{b}{n+b-k}\times\frac{(b-1)!}{(b-1)!}\\
&= \frac{n!b!}{(n+b)!}\times\frac{(n+b-k)!}{(b-1)!(n-k)!}\times\frac{1}{n+b-k}\\
&= \frac{1}{\binom{n+b}{b}}\times\frac{(n+b-k-1)!}{(b-1)!(n-k)!}\\
&= \frac{\binom{n+b-k-1}{b-1}}{\binom{n+b}{b}}
\end{aligned}$$

Pour $k=0$, $P([X=0])=P(B_1)=\dfrac{b}{n+b}$; or pour $k=0$,

$$\frac{\binom{n+b-k-1}{b-1}}{\binom{n+b}{b}}=\frac{\binom{n+b-1}{b-1}}{\binom{n+b}{b}}=\frac{(n+b-1)!b!n!}{(b-1)!n!(n+b)!}=\frac{b}{n+b}.$$

$$\boxed{\forall k\in\{0,1,\ldots,n\},\ P([X=k])=\frac{\binom{n+b-k-1}{b-1}}{\binom{n+b}{b}}}$$

II–2)

La famille $([X=k])_{0\leq k\leq n}$ est un système complet d'événements ; par conséquent $\sum_{k=0}^{n}P([X=k])=1$. On a donc

$$\sum_{k=0}^{n} P([X=k]) = 1 \iff \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n+b-k-1}{b-1}}{\binom{n+b}{b}} = 1$$

$$\iff \frac{1}{\binom{n+b}{b}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+b-k-1}{b-1} = 1$$

$$\iff \sum_{k=0}^{n} \binom{n+b-k-1}{b-1} = \binom{n+b}{b}$$

Posons $j = n-k$, il vient

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+b-k-1}{b-1} = \binom{n+b}{b} \iff \sum_{j=0}^{n} \binom{j+b-1}{b-1} = \binom{n+b}{b}$$

on change j en k, et on obtient

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{k+b-1}{b-1} = \binom{n+b}{b}}$$

II–3)

$$k\binom{k+a}{a} = k\frac{(k+a)!}{a!k!} = \frac{(k+a)!}{a!(k-1)!} \quad \text{car } k \geq 1$$

$$= (a+1)\frac{(k+a)!}{(a+1)!(k-1)!}$$

$$\boxed{\forall k \geq 1,\ k\binom{k+a}{a} = (a+1)\binom{k+a}{a+1}}$$

Donc
$$\sum_{k=0}^{N} k\binom{k+a}{a} = \sum_{\underline{k=1}}^{N} k\binom{k+a}{a}$$

$$= \sum_{k=1}^{N} (a+1)\binom{k+a}{a+1} \quad \text{posons } j = k-1$$

$$= (a+1)\sum_{j=0}^{N-1} \binom{j+a+1}{a+1}$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{N} k\binom{k+a}{a} = (a+1)\sum_{j=0}^{N-1} \binom{j+a+1}{a+1}}$$

II–4)

$$E(n-X) = \sum_{k=0}^{n} (n-k)P([X=k]) \quad \text{par le théorème du transfert}$$

$$= \sum_{j=0}^{n} jP([X=n-j]) \quad \text{on a posé } k=n-j$$

$$= \sum_{j=0}^{n} j\frac{\binom{n+b-(n-j)-1}{b-1}}{\binom{n+b}{b}} \quad \text{d'après la question II–1)}$$

$$= \frac{1}{\binom{n+b}{b}} \sum_{j=0}^{n} j\binom{b+j-1}{b-1} \qquad \textbf{(4)}$$

$$= \frac{1}{\binom{n+b}{b}} \sum_{\underline{j=1}}^{n} j\binom{b+j-1}{b-1}$$

On applique la relation $k\binom{k+a}{a} = (a+1)\binom{k+a}{a+1}$ pour $k=j$ et $a=b-1$, on obtient $j\binom{b+j-1)}{b-1} = b\binom{j+b-1}{b}$; dans ces conditions,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} j\binom{b+j-1}{b-1} &= \sum_{j=1}^{n} b\binom{j+b-1}{b} && \text{on pose } k=j-1\\
& b\sum_{k=0}^{n-1}\binom{b+k}{b} && \text{d'après la question II–2).}\\
&= b\binom{n+b}{b+1}
\end{aligned}$$

$$\text{Donc } E(n-X) = \frac{b\binom{n+b}{b+1}}{\binom{n+b}{b}} = b\frac{(n+b)!b!n!}{(b+1)!(n-1)!(n+b)!}$$

$$\boxed{E(n-X) = \frac{nb}{b+1}}$$

Par linéarité de l'espérance, $E(n-X) = n - E(X)$, donc
$n - E(X) = \frac{nb}{b+1} \Longleftrightarrow E(X) = n - \frac{nb}{b+1}$

$$\boxed{E(X) = \frac{n}{b+1}}$$

II–5)

$P([X=k]\cap[Y=i]) = P([X=k])P_{[X=k]}(Y=i)$.

Lorsque l'événement $[X=k]$ est réalisé, on a tiré k boules noires et une boule blanche sans remise ; l'urne contient alors $n-k+b-1$ boules dont $n-k$ boules noires et $b-1$ boules blanches.

Si $k=n$, il n'y a plus de boules noires dans l'urne, on est sûr de tirer une blanche.

$$P_{[X=n]}(Y=i) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i=0\\ 0 & \text{si} \quad i\geq 1\end{cases}$$

Si $0\leq k\leq n-1$, on effectue $i+1$ tirages d'une boule à chaque fois, avec remise (donc de manière indépendante les uns des autres), dont les i premiers donnent des boules noires et le suivant une boule blanche.

$$P_{[X=k]}(Y=i) = \left(\frac{n-k}{n-k+b-1}\right)^i \frac{b-1}{n-k+b-1}$$

En utilisant le résultat de la question II–1),

$$\boxed{P([X=k]\cap[Y=i]) = \begin{cases} \dfrac{\binom{n+b-k-1}{b-1}}{\binom{n+b}{b}}\left(\dfrac{n-k}{n-k+b-1}\right)^i \dfrac{b-1}{n-k+b-1} & \text{si} \quad 0\leq k\leq n-1\\[2ex] 0 & \text{si} \quad k=n\end{cases}}$$

On peut d'ailleurs remarquer que les deux formules coïncident pour $k=n$ puisque $i\geq 1$

II–6)

Puisque $b\geq 2$, on a $0\leq \dfrac{n-k}{n-k+b-1} < 1$; en effet, on a $n-k+b-1 > n-k \geq 0$.

La série de terme général $i\Big(\dfrac{n-k}{n-k+b-1}\Big)^{i-1}$ est la série dérivée première de la série géométrique de terme général $\Big(\dfrac{n-k}{n-k+b-1}\Big)^{i}$; cette série converge puisque sa raison $\dfrac{n-k}{n-k+b-1}$ appartient à $[0,1[$.

$$\textbf{La série } \sum_{i\geq 1} i\Big(\frac{n-k}{n-k+b-1}\Big)^{i-1} \textbf{ est convergente}$$

D'après le cours, $\displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} i\Big(\frac{n-k}{n-k+b-1}\Big)^{i-1} = \frac{1}{(1-\frac{n-k}{n-k+b-1})^2} = \frac{1}{(\frac{b-1}{n+b-k-1})^2}$,

$$\boxed{\sum_{i=1}^{+\infty} i\Big(\frac{n-k}{n-k+b-1}\Big)^{i-1} = \Big(\frac{n+b-k-1}{b-1}\Big)^2}$$

II–7)

- Calcul de $P([Y=i])$ pour $i \geq 1$.

La famille $([X=k])_{0\leq k\leq n}$ est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales,

$$P([Y=i]) = \sum_{k=0}^{n} P([X=k]\cap[Y=i]) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\dbinom{n+b-k-1}{b-1}}{\dbinom{n+b}{b}} \Big(\frac{n-k}{n-k+b-1}\Big)^{i} \frac{b-1}{n-k+b-1}.$$

- Calcul de $E(Y)$.

Soit $N\in\mathbb{N}$, notons $S_N = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} iP([Y=i])$ et remarquons que le terme $iP([Y=i])$ pour $i=0$ n'intervient pas dans le calcul de $E(Y)$.

$$\begin{aligned}
S_N &= \sum_{i=1}^{N} i\sum_{k=0}^{n} P([X=k]\cap[Y=i]) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=0}^{n} iP([X=k]\cap[Y=i])\\
&= \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=1}^{N} iP([X=k]\cap[Y=i]) \quad \text{on a interverti les ordres de sommation}\\
&\quad\ \text{car les sommes sont finies}\\
&= \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=1}^{N} iP([X=k])P_{[X=k]}([Y=i])\\
&= \sum_{k=0}^{n} P([X=k])\sum_{i=1}^{N} iP_{[X=k]}([Y=i])\\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{b-1}{n-k+b-1}P([X=k])\sum_{i=1}^{N} i\Big(\frac{n-k}{n-k+b-1}\Big)^{i} \quad \text{d'après II–5)}\\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{b-1}{n-k+b-1}P([X=k])\frac{n-k}{n-k+b-1}\sum_{i=1}^{N} i\Big(\frac{n-k}{n-k+b-1}\Big)^{i-1}\\
&= \sum_{k=0}^{n-1} P([X=k])\frac{(n-k)(b-1)}{(n-k+b-1)^2}\sum_{i=1}^{N} i\Big(\frac{n-k}{n-k+b-1}\Big)^{i-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to+\infty} S_N &= \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} P([X=k]) \frac{(n-k)(b-1)}{(n-k+b-1)^2} \sum_{i=1}^{N} i \Big(\frac{n-k}{n-k+b-1}\Big)^{i-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} P([X=k]) \frac{(n-k)(b-1)}{(n-k+b-1)^2} \lim_{N\to+\infty} \sum_{i=1}^{N} i \Big(\frac{n-k}{n-k+b-1}\Big)^{i-1} \\
&\quad \text{(limite d'une somme de } n \text{ termes)} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} P([X=k]) \frac{(n-k)(b-1)}{(n-k+b-1)^2} \sum_{i=1}^{+\infty} i \Big(\frac{n-k}{n-k+b-1}\Big)^{i-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} P([X=k]) \frac{(n-k)(b-1)}{(n-k+b-1)^2} \Big(\frac{n-k+b-1}{b-1}\Big)^2 \quad \text{d'après II–6)} \\
&= \frac{1}{b-1} \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) P([X=k]) \\
&= \frac{1}{b-1} E(n-X) \quad \text{d'après le théorème du transfert}
\end{aligned}$$

$E(Y) = \dfrac{1}{b-1}\dfrac{nb}{b+1}$ d'après la question II–4).

$$\boxed{E(Y) = \frac{nb}{b^2-1}}$$