ecricome
www.ecricome.org

CONCOURS D'ADMISSION 2007

2

# Mathématiques

## Option Economique

**Mercredi 18 avril 2007 de 8 h 00 à 12 h 00**

**Durée : 4 heures**

*Candidats bénéficiant de la mesure "Tiers-temps":*
*8 h 00 – 13 h 20*

Aucun document n'est autorisé.
Aucun instrument de calcul n'est autorisé.

L'énoncé comporte 6 pages.

***Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé et à donner des démonstrations complètes – mais brèves – de leurs affirmations.***

*Tournez la page s.v.p.*

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

# 1. EXERCICE.

Soit $a$ un réel strictement positif. On considère la fonction $f_a$ définie pour tout réel $t$ strictement positif par :

$$f_a(t) = \frac{1}{2}(t + \frac{a^2}{t})$$

ainsi que la suite $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ de nombre réels déterminée par son premier terme $u_0 > 0$ et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = f_a(u_n)$$

## 1.1. Etude des variations de la fonction $f_a$ .

1. Déterminer la limite de $f_a(t)$ lorsque $t$ tend vers $+\infty$. Justifier l'existence d'une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ et donner la position de la courbe représentative de $f_a$ par rapport à cette asymptote.

2. Déterminer la limite de $f_a(t)$ lorsque $t$ tend vers 0 par valeurs positives. Interpréter graphiquement cette limite.

3. Donner l'expression de la fonction dérivée de $f_a$ sur $\mathbb{R}^{*+}$ et dresser le tableau de variation de $f_a$.

4. En déduire que :
$$\forall t > 0 \qquad f_a(t) \geqslant a$$

## 1.2. Etude de la convergence de la suite $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$..

1. Que dire de la suite $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ dans le cas particulier où $u_0 = a$?

2. Dans la suite on revient au cas général $u_0 > 0$.
Démontrer que :
$$\forall t > a \qquad 0 < f'_a(t) < \frac{1}{2}$$

3. Montrer que pour tout entier $n$, non nul :
$$u_n \geqslant a$$



Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

4. Prouver alors que pour tout entier $n$ non nul :

$$0 \leqslant u_{n+1} - a \leqslant \frac{1}{2}(u_n - a)$$

Puis que :

$$|u_n - a| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |u_1 - a|$$

5. En déduire la convergence de la suite $(u_n)$ et indiquer sa limite.

6. En utilisant ce qui précède, écrire un programme en langage Pascal permettant d'afficher les 100 premiers termes d'une suite $(u_n)$, de premier terme 1, convergeant vers $\sqrt{2}$.

### 1.3. Recherche d'extremum d'une fonction à deux variables.

On considère, sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, la fonction $g$ définie par :

$$g(x,y) = \frac{1}{2}(\frac{1}{x} + \frac{1}{y})(1+x)(1+y)$$

1. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de $g$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

2. Montrer que $g$ admet un extremum local sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ dont on précisera la nature.

3. Vérifier que :

$$g(x,y) = 1 + f_1(x) + f_1(y) + f_1(\frac{x}{y})$$

4. En déduire que l'extremum local est un extremum global de $g$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

## 2. EXERCICE.

$M_2(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels.
La matrice $A$ suivante étant donnée

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$$

on définit l'application $\phi_A$ par :

$$\begin{aligned} \phi_A : M_2(\mathbb{R}) &\to M_2(\mathbb{R}) \\ M &\mapsto \phi_A(M) = AM - MA \end{aligned}$$

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

### 2.1. Diagonalisation de A.

1. Vérifier que $A^2 = A$. En déduire les valeurs propres possibles de $A$.

2. Prouver que la matrice $A$ est diagonalisable et déterminer une matrice $P$ inversible de $M_2(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D$ de $M_2(\mathbb{R})$ dont la première colonne est nulle vérifiant la relation :

$$A = PDP^{-1}$$

Donner l'écriture matricielle de $P^{-1}$.

### 2.2. Diagonalisation de $\phi_A$.

1. Montrer que $\phi_A$ est un endomorphisme de $M_2(\mathbb{R})$.

2. Etablir que $X^3 - X$ est un polynôme annulateur de $\phi_A$. En déduire les valeurs propres possibles de $\phi_A$.

3. Montrer que la matrice $M$ est un vecteur propre de $\phi_A$ associée à la valeur propre $\lambda$ si et seulement si la matrice $N = P^{-1}MP$ est non nulle et vérifie l'équation matricielle :

$$DN - ND = \lambda N$$

4. On pose $N = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

   a. Trouver l'ensemble des matrices $N$ telles que $DN - ND = 0$.

   b. En déduire que la famille $(A, M_1)$ avec $M_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$ est une base du sous-espace propre $Ker\phi_A$ associé à la valeur propre 0.

   c. Déterminer les deux autres valeurs propres non nulles $\lambda_1$ et $\lambda_2$ de $\phi_A$ et caractériser les matrices $N$ associées.

   d. En déduire une base de chaque sous-espace propre $E_{\lambda_1}$ et $E_{\lambda_1}$ associé aux valeurs propres $\lambda_1$ et $\lambda_2$.

5. L'endomorphisme $\phi_A$ est-il diagonalisable ?



Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

# 3. EXERCICE.

Soucieux d'améliorer le flux de sa clientèle lors du passage en caisse, un gérant de magasin a réalisé les observations suivantes :

## 3.1. Mode de paiement de la clientèle.

1. L'étude du mode de paiement en fonction du montant des achats a permis d'établir les probabilités suivantes :

$$P[S = 0 \cap U = 0] = 0.4$$
$$P[S = 0 \cap U = 1] = 0.3$$
$$P[S = 1 \cap U = 0] = 0.2$$
$$P[S = 1 \cap U = 1] = 0.1$$

où $S$ représente la variable aléatoire prenant la valeur 0 si le montant des achats est inférieur ou égal à 50 euros, prenant la valeur 1 sinon, et $U$ la variable aléatoire prenant la valeur 0 si la somme est réglée par carte bancaire, prenant la valeur 1 sinon.

   a. Déterminer les lois de $S$ et $U$ et vérifier que la probabilité que le client règle par carte bancaire est égale à $p = \frac{3}{5}$.

   b. Calculer la covariance du couple $(S, U)$. Les variables $S$ et $U$ sont-elles indépendantes ?

   c. Quelle est la probabilité que la somme réglée soit supérieure strictement à 50 euros sachant que le client utilise un autre moyen de paiement que la carte bancaire ?

2. On suppose que les modes de règlement sont indépendants entre les individus.
Une caissière reçoit $n$ clients dans sa journée ($n \geqslant 2$).
On définit trois variables aléatoires $C_n, L_1, L_2$ par :
-$C_n$ comptabilise le nombre de clients qui paient par carte bancaire.
-$L_1$(resp.$L_2$) est égale au rang du $1^{er}$ (resp.du $2^{ème}$) client utilisant la carte bancaire comme moyen de paiement, s'il y en a au moins un (resp.au moins deux) et à zéro sinon.

   a. Reconnaître la loi de $C_n$, rappeler la valeur de l'espérance et de la variance de cette variable aléatoire.



Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

b. Déterminer la loi de $L_1$ et vérifier que :

$$\sum_{k=0}^{n} P[L_1 = k] = 1$$

c. Déterminer la loi de $L_2$.

### 3.2. Etude du temps moyen de passage en caisse.

Après enquête, on estime que le temps de passage à une caisse, exprimé en unités de temps, est une variable aléatoire $T$ dont une densité de probabilité est donnée par la fonction $f$ définie par :

$$\begin{cases} f(x) = xe^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ f(x) = 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1. Rappeler la définition d'une densité de probabilité d'une variable aléatoire $X$ suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1$. Donner la valeur de l'espérance et de la variance de $X$.

2. Utiliser la question précédente pour vérifier que $f$ est bien une densité de probabilité, puis montrer que $T$ admet une espérance que l'on déterminera.
Quel est le temps moyen de passage en caisse ?

3. a. Démontrer que la fonction de répartition de $T$, notée $F_T$ est définie par :

$$\begin{array}{ll} \forall x < 0 & F_T(x) = 0 \\ \forall x \geqslant 0 & F_T(x) = 1 - (x+1)e^{-x} \end{array}$$

b. Montrer que la probabilité que le temps de passage en caisse soit inférieur à deux unités(de temps) sachant qu'il est supérieur à une unité est égale à $\dfrac{2e-3}{2e}$.

4. Un jour donné, trois clients $A, B, C$ se présentent simultanément devant deux caisses libres. Par courtoisie, $C$ décide de laisser passer $A$ et $B$ et de prendre la place du premier d'entre eux qui aura terminé. On suppose que les variables $T_A$ et $T_B$ correspondant au temps de passage en caisse de $A$ et $B$ sont indépendantes.

a. $M$ désignant le temps d'attente du client $C$ exprimer $M$ en fonction de $T_A$ et $T_B$.



Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

b. Montrer que la fonction de répartition de la variable aléatoire $M$ est donnée par :

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}^+ & P[M \leqslant t] = 1 - (1+t)^2 e^{-2t} \\ \forall t \in \mathbb{R}^{-*} & P[M \leqslant t] = 0 \end{cases}$$

c. Prouver que $M$ est une variable à densité et expliciter une densité de $M$.



Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

ANNALES DE MATHEMATIQUES

# ECRICOME 2007 VOIE E

## CORRIGE

## EXERCICE I

### 1.1 Etude de la fonction $f_a$

**1)**

$\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{1}{2}\left(t+\frac{a^2}{t}\right) = +\infty$ sans problème car $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{a^2}{t} = 0$, donc $\boxed{\lim\limits_{t\to+\infty} f_a(t) = +\infty}$

- $f_a(t) - \frac{1}{2}t = \frac{a^2}{2t}$, donc $\lim\limits_{t\to+\infty} (f_a(t) - \frac{1}{2}t) = 0$. On en conclut que la droite " oblique " d'équation $y = \frac{1}{2}t$ est asymptote à la courbe de $f_a$ au voisinage de $+\infty$.

***Remarque*** : on peut rappeler que deux fonctions $g$ et $h$ sont asymptotes au voisinage de $+\infty$ si $\lim\limits_{t\to+\infty} (g(t) - h(t)) = 0$.

D'autre part, pour $t > 0$, $\frac{a^2}{t} > 0$, donc $f_a(t) - \frac{1}{2}t > 0$ ou encore $f_a(t) > \frac{1}{2}t$. Cela signifie que pour tout $t > 0$ (donc au voisinage de $+\infty$ en particulier), la courbe de $f_a$ est au dessus de son asymptote.

**2)**

- $\lim\limits_{t\to0^+} \frac{1}{2}t = 0$ et $\lim\limits_{t\to0^+} \frac{a^2}{2t} = +\infty$ implique $\lim\limits_{t\to0^+} f_a(t) = +\infty$.

Graphiquement cela indique que l'axe des ordonnées du repère dans lequel est construite la courbe de $f_a$ est asymptote à cette courbe.

**3)**

Sur $\mathbb{R}_+^*$, $t \mapsto \frac{a^2}{t}$ est continue, dérivable en tant que fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas. Donc $t \mapsto t + \frac{a^2}{t}$ aussi et $f_a$ est continue, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned} \forall t > 0,\ f_a'(t) &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a^2}{t^2}\right) \\ &= \frac{t^2 - a^2}{2t^2} = (t-a)\frac{t+a}{2t^2} \end{aligned}$$

Pour tout $t > 0$, $\frac{t+a}{2t^2} > 0$, donc le signe de $f_a'(t)$ est le même que celui de $(t-a)$. Ce qui donne le tableau de variations suivant :

| $t$ | $0$ | | $a$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_a'(t)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f_a$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $a$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |


© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

**4)**

Le tableau de variations précédent fait apparaître clairement que la fonction $f_a$ présente un minimum absolu au point $t = a$, dont la valeur est $a$. Donc

$$\boxed{\forall t > 0,\ f_a(t) \geq a}$$

### 1.2 Etude de la convergence de la suite $(u_n)_{n\in N^*}$

**1)**

Si $u_0 = a$, alors $u_1 = f_a(u_0) = f_a(a) = a$ d'après l'étude précédente. Supposons que $u_n = a$ pour un entier $n$ donné, alors $u_{n+1} = f_a(u_n) = f_a(a) = a$. Nous venons de montrer par récurrence que si $u_0 = a$, la suite $(u_n)$ est constante et égale à $a$.

**2)**

- $f'_a(t) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a^2}{t^2}\right) - \frac{1}{2} = -\frac{a^2}{2t^2}$ .

On conclut que $\forall t > 0,\ f'_a(t) - \frac{1}{2} < 0$, donc $f'_a(t) < \frac{1}{2}$ ; en particulier pour $t > a$.

- Si $t > a > 0$, alors par stricte croissance de la fonction $t \mapsto t^2$ sur $\mathbb{R}_+$, on a $t^2 > a^2 > 0$. En divisant par $t^2 > 0$, il vient $1 > \frac{a^2}{t^2}$ ; donc $1 - \frac{a^2}{t^2} > 0$ .

**Conclusion :** pour $t > a$, on a $f'_a(t) > 0$ et par conséquent $\boxed{\forall t > a,\ 0 < f'_a(t) < \frac{1}{2}}$

**3)**

- On montre d'abord par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$.

$u_0 > 0$ par hypothèse ; supposons $u_n > 0$ pour un entier naturel $n$ donné. Alors $u_{n+1} = f(u_n) \geq a$ d'après 1.4) puisque $u_n > 0$, donc $u_{n+1} > 0$. La propriété est héréditaire et par principe du raisonnement par récurrence,

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n > 0.$$

Remarque : cela revient à dire et à utiliser le fait que l'intervalle $]0, +\infty[$ est stable par $f$. En effet, d'après le tableau de vriations de $f$, $f(]0, +\infty[) = [a, +\infty[ \subset ]0, +\infty[$.

- Puis d'après le tableau de variations de la question 1.3), $\forall n > 0,\ u_n = f(u_{n-1}) \geq a$ puisque $u_{n-1}$ existe $(n - 1 \geq 0)$ et $u_{n-1} > 0$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \geq a}$$

***Remarque*** : cela veut dire que $\forall n \geq 1$, $u_n$ appartient à l'intervalle $[a, +\infty[$

**4)**

La fonction $f_a$ est continue, dérivable sur $[a, +\infty[$. De plus, d'après la question 2.2), sur cet intervalle, $0 < f'_a(t) < \frac{1}{2}$, donc $|f'_a(t)| \leq \frac{1}{2}$.

**On peut donc appliquer l'inégalité des accroissements finis à $f_a$ entre $a$ et $u_n$.**

$$\forall n \geq 1,\ |f(u_n) - f(a)| \leq \frac{1}{2}|u_n - a| \text{ soit encore } |u_{n+1} - a| \leq \frac{1}{2}|u_n - a|,$$

puisque $f_a(a) = a$.

Mais on sait que $\forall k \geq 1,\ u_k \geq a$, donc on a $0 \leq u_{n+1} - a$ et $0 \leq u_n - a$. L'inégalité précédente devient :

$$\boxed{\forall n \geq 1,\ 0 \leq u_{n+1} - a \leq \frac{1}{2}(u_n - a)}$$

***Remarque*** : On aurait pu dire aussi :

$0 \leq f'_a(t) \leq \frac{1}{2}$, $f(u_n) - f(a) \geq 0$ et $u_n - a \geq 0$, donc :

$0 \times (u_n - a) \leq f(u_n) - f(a) \leq \frac{1}{2}(u_n - a)$, soit $0 \leq u_{n+1} - a \leq \frac{1}{2}(u_n - a)$.


© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

- Montrons l'inégalité $|u_n - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}|u_1 - a|$ par récurrence sur $n \geq 1$

Initialisation : $|u_1 - a| = \left(\frac{1}{2}\right)^0 |u_1 - a|$, donc $|u_1 - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0 |u_1 - a|$

Hérédité : supposons l'inégalité satisfaite pour un entier $n \geq 1$ donné ;

on a donc $|u_n - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}|u_1 - a|$.

Multiplions les deux termes de cette inégalité par $\frac{1}{2} > 0$, on obtient $\frac{1}{2}|u_n - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_1 - a|$.

Or, d'après l'inégalité des accroissements finis précédente, $|u_{n+1} - a| \leq \frac{1}{2}|u_n - a|$. La comparaison des deux inégalités donne $|u_{n+1} - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_1 - a|$

L'inégalité est donc héréditaire et par principe du raisonnement par récurrence elle est satisfaite pour tout $n \geq 1$.

$$\boxed{\forall n \geq 1,\ |u_n - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}|u_1 - a|}$$

**5)**

La suite $n \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}|u_1 - a|$ est géométrique, de raison $\frac{1}{2} \in ]-1, 1[$, elle converge donc vers 0.

L'encadrement $0 \leq |u_n - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}|u_1 - a|$ permet de conclure que la suite $n \mapsto |u_n - a|$ est convergente et que sa limite est nulle. Il en résulte que

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\geq 1} \text{ est convergente et } \lim_{n\to+\infty} u_n = a}$$

**6)**

Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{2}$, c'est que $f_{\sqrt{2}}(t) = \frac{1}{2}(t + \frac{2}{t})$

```
PROGRAMME ECRICOME2007 ;
var k : integer ;
    u : real ;
BEGIN
u := 1 ; k := 1 ; writeln('u(',1,')=' , u) ;
for k :=2 to 100 do begin
      u:=(u+2/u)/2 ;
      writeln('u(',k,')=' ,u) ;
                  end ;
END.
```

### 1.3 Recherche d'un extremum d'une fonction de deux variables

**1)**

La fonction $g$ est le produit d'une fraction rationnelle $(x, y) \mapsto \frac{1}{2}(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}) = \frac{x+y}{2xy}$ dont le dénominateur ne s'annule par sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ et du polynôme $(x, y) \mapsto (1 + x)(1 + y)$ qui sont tous les deux continus, de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $(\mathbb{R}_+^*)^2$ de $\mathbb{R}^2$.

$g$ est donc une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$

Pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) &= \frac{1+y}{2}\Big(-\frac{1}{x^2}(1 + x) + (\frac{1}{x} + \frac{1}{y})\Big)\\ &= \frac{1+y}{2}\Big(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y}\Big)\\ &= \frac{1+y}{2} \times \frac{x^2 - y}{x^2 y}.\end{aligned}$$

 © EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

En remarquant que $g(x,y)=g(y,x)$, le même calcul donnera

Pour tout $(x,y)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$, $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y)=\dfrac{1+x}{2}\times\dfrac{y^2-x}{y^2x}$.

Le couple $(x,y)$ de $(\mathbb{R}_+^*)^2$ est un point critique de $g$ si et seulement si $(x,y)$ est solution du système
$\begin{cases}\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) &= 0\\ \dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) &= 0\end{cases}$

Ce système équivaut à $\begin{cases}x^2-y &= 0\\ y^2-x &= 0\end{cases}$ puisque $\dfrac{1+y}{2}\times\dfrac{1}{x^2y}$ et $\dfrac{1+x}{2}\times\dfrac{1}{y^2x}$ sont strictement positifs sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$

Soit encore $x^2=y$ et $x=y^2$, donc par substitution, $y^4=y$ et $x=y^2$. Puisque $x$ et $y$ sont strictement positifs, $y^4=y$ équivaut à $y^3=1$. La fonction $t\mapsto t^3$ est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur lui même, donc l'équation $y^3=1$ y admet une seule solution $y=1$. La deuxième équation $x=y^2$ donne alors $x=1$.

La fonction $g$ admet sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ un unique point critique $(x,y)=(1,1)$

**2)**

La fonction $g$ étant de classe $\mathcal{C}^2$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$, le thèorème de Schwarz donne $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}(x,y)=\dfrac{\partial^2 g}{\partial y\partial x}(x,y)$

Pour $(x,y)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) &= \frac{1+y}{2}\Big(\frac{2}{x^3}\Big)=r(x,y)\\
\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) &= \frac{1+x}{2}\Big(\frac{2}{y^3}\Big)=t(x,y)\\
\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}(x,y) &= \frac{1}{2}\Big(-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y}\Big)+\frac{1+y}{2}\times\frac{-1}{y^2}\\
&= \frac{1}{2}\Big(-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y}-\frac{1}{y^2}-\frac{1}{y}\Big)\\
\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}(x,y) &= -\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\Big)=s(x,y)
\end{aligned}$$

Au point critique $(1,1)$, $(s^2-rt)(1,1)=1-2\times 2=-3<0$. Il y a donc un extremum local. De plus $r(1,1)=2>0$, donc il s'agit d'un minimum local

**3)**

$$\begin{aligned}
1+f_1(x)+f_1(y)+f_1(\tfrac{x}{y}) &= 1+\tfrac{1}{2}(x+\tfrac{1}{x})+\tfrac{1}{2}(y+\tfrac{1}{y})+\tfrac{1}{2}(\tfrac{x}{y}+\tfrac{y}{x})\\
&= \tfrac{1}{2}(2+x+\tfrac{1}{x}+y+\tfrac{1}{y}+\tfrac{x}{y}+\tfrac{y}{x})\cdot\\
g(x,y) &= \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{x}+\tfrac{1}{y})(1+x)(1+y)\\
&= \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{x}+\tfrac{1}{y})(1+x+y+xy)\\
&= \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{x}+1+\tfrac{y}{x}+y+\tfrac{1}{y}+\tfrac{x}{y}+1+x)\cdot
\end{aligned}$$

On a bien $\forall(x,y)\in(\mathbb{R}_+^*)^2,\ 1+f_1(x)+f_1(y)+f_1(\frac{x}{y})=g(x,y)$

La valeur du minimum local est $g(1,1)=4$. D'après la question 1.4), on sait que $\forall t>0,\ f_a(t)\geq a$, donc $\forall t>0,\ f_1(t)\geq 1$.

$\forall(x,y)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2,\ f_1(x)\geq 1,\ f_1(y)\geq 1$ et $f_1(\frac{x}{y})\geq 1\Longrightarrow g(x,y)\geq 4=g(1,1)$

Au point $(1,1)$, la fonction $g$ admet un minimum absolu puisque $\forall(x,y)\in(\mathbb{R}_+^*)^2,\ g(x,y)\geq g(1,1)$


© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

## EXERCICE II

### 2.1 Diagonalisation de $A$

**1)**

Il suffit de faire le calcul : $A^2 = A$.

- Le polynôme $X^2 - X$ est donc un polynôme annulateur de $A$ puisque $A^2 - A = (0)$. On sait qu'alors les valeurs propres possibles de $A$ sont solutions de l'équation $x^2 - x = 0$.

Les valeurs propres possibles de $A$ sont 0 ou 1 : $\text{spect}(A) \subset \{0, 1\}$

Pour ceux qui ne connaissent pas ce résultat :

Si $\lambda$ est valeur propre de $A$, il existe $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, $X \neq (0)$, telle que $AX = \lambda X$. Donc $A(AX) = A(\lambda X) = \lambda AX = \lambda^2 X$. Or $A(AX) = A^2X = AX = \lambda X$. On obtient l'égalité : $\lambda X = \lambda^2 X$ et puisque $X \neq (0)$, cela implique $\lambda^2 = \lambda$, ce qui est le résultat annoncé.

**2)**

Considérons l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique. Dans cette base, la matrice $A$ est associée à un endomorphisme $f$ et l'on sait que $f$ et $A$ ont les mêmes valeurs propres, et que $f$ diagonalisable équivaut à $A$ diagonalisable.

Raisonnons sur $f$.

- Détermination de $\text{Ker}\, f$ :

$u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ appartient à $\text{Ker}\, f$ si et seulement si $f(x, y) = (0, 0)$. Cette égalité équivaut au système suivant :

$\begin{cases} 3x - y &= 0 \\ 6x - 2y &= 0 \end{cases}$ Effectuons $L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1$ on obtient le système équivalent

$\begin{cases} 3x - y &= 0 \\ 0 &= 0 \end{cases}$

Donc $(x, y) \in \text{Ker}\, f \iff y = 3x$

$\text{Ker}\, f = \{u = (x, 3x) \in \mathbb{R}^2,\ x \in \mathbb{R}\} = \text{vect}((1, 3))$.

Si l'on note, d'une manière générale $E_\lambda(f)$ le sous-espace propre de $f$ associé à $\lambda$, on a :

$E_0(f) = \text{vect}((1, 3)) : \dim E_0(f) = 1$

- Détermination de $\text{Ker}(f - \text{Id})$ :

$f(x, y) = (x, y) \iff \begin{cases} 2x - y &= 0 \\ 6x - 3y &= 0 \end{cases}$ Effectuons $L_2 \longleftarrow L_2 - 3L_1$, on obtient le système équivalent suivant $\begin{cases} 2x - y &= 0 \\ 0 &= 0 \end{cases}$

$\text{Ker}(f - \text{Id}) \neq \{0\}$ ; par suite $\text{Ker}(f - \text{Id}) = E_1(f)$.

$E_1(f) = \{u = (x, 2x) \in \mathbb{R}^2,\ x \in \mathbb{R}\} = \text{vect}((1, 2)) : \dim E_1(f) = 1$

**Conclusion :**

$f$ est un endomorphisme d'un espace de dimension 2 ; la somme des dimensions de ses deux sous-espaces propres vaut 2, donc $f$ (et par conséquent $A$) est diagonalisable

***Remarque*** : on aurait pu dire aussi : $f$ est un endomorphisme d'un espace de dimension 2 qui admet deux valeurs propres distinctes, il est donc diagonalisable (c'est une condition suffisante de diagonalisabilité).


© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Si l'on pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, la formule de changement de base pour les endomorphismes (ou les matrices carrées) permet d'écrire :

$$A = PDP^{-1}$$

- Détermination de $P^{-1}$

On résout le système $P\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ qui est équivalent à $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$P\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ équivaut à :

$$\left\{\begin{array}{ll} x+y & =a \\ 3x+2y & =b \end{array}\right. \quad L_2 \longleftarrow L_2 - 3L_1 \iff \left\{\begin{array}{ll} x+y & =a \\ -y & =b-3a \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ll} y & =-b+3a \\ x & =a-(-b+3a)=-2a+b \end{array}\right.$$

En mettant ces résultats sous forme matricielle $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{On en déduit } P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}}$$

### 2.2. Diagonalisation de $\varphi_A$

**1)**

D'après les propriétés de calcul dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, puisque $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on a dèjà $AM \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $MA \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, donc $AM - MA \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Ainsi

$$\boxed{\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ \Phi_A(M) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$$

Soit $(M, M') \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \varphi_A(M+\lambda M') &= A(M+\lambda M') - (M+\lambda M')A \\ &= AM + \lambda AM' - MA - \lambda M'A \\ &= (AM - MA) + \lambda(AM' - M'A) \\ &= \varphi_A(M) + \lambda\varphi_A(M') \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On vient de montrer que } \varphi_A \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))}$$

**2)**

- Calculons, pour tout $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\varphi_A^3(M)$

$$\begin{aligned} \varphi_A^2(M) &= \varphi_A(AM) - MA) \\ &= A(AM - MA) - (AM - MA)A \\ &= A^2M - 2AMA + MA^2 = AM - 2AMA + MA \quad \text{car } A^2 = A \\ \varphi_A^3(M) &= \varphi_A(AM - 2AMA + MA) \\ &= A(AM - 2AMA + MA) - (AM - 2AMA + MA)A \\ &= A^2M - 2A^2MA + AMA - AMA + 2AMA^2 - MA^2 \\ &= AM - 2AMA + 2AMA - MA \\ \varphi_A^3(M) &= AM - MA = \varphi_A(M) \end{aligned}$$

**Conclusion :** $\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ \varphi_A^3(M) - \varphi_A(M) = (0)$, ce qui veut dire $\varphi_A^3 - \varphi_A = 0$

$$\boxed{\text{Le polynôme } X^3 - X \text{ est donc un polynôme annulateur de } \varphi_A}$$

**On en déduit, comme on l'a fait au 2.1.1) que les valeurs propres possibles de $\varphi_A$ sont les racines de l'équation $x^3 - x = 0$, c'est-à-dire $0$ ou $-1$ ou $1$.**

$$\boxed{\text{spect}(\varphi_A) \subset \{-1, 0, -1\}}$$

 © EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

**3)**

$M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est vecteur propre de $\varphi_A$ associé à une valeur propre $\lambda$ si et seulement si $M \neq (0)$ et $\varphi_A(M) = \lambda M$, c'est-à-dire

$$AM - MA = \lambda M \qquad \textbf{(1)}$$

Or $N = P^{-1}MP$, donc $M = PNP^{-1}$ et $A = PDP^{-1}$. Remplaçons $M$ et $A$ par leurs valeurs dans **(1)**, cela donne

$$\begin{aligned} AM - MA = \lambda M &\iff PD\underbrace{P^{-1}P}_{=I_3}NP^{-1} - PN\underbrace{P^{-1}P}_{=I_3}DP^{-1} = \lambda PNP^{-1} \\ &\iff PDNP^{-1} - PNDP^{-1} = \lambda PNP^{-1} \\ &\iff P(DN - ND)P^{-1} = \lambda PNP^{-1} \end{aligned}$$

Multiplions cette dernière égalité à gauche par $P^{-1}$ et à droite par $P$, il vient

$AM - MA = \lambda M \iff P^{-1}P(DN - ND)P^{-1}P = \lambda P^{-1}PNP^{-1}P$, donc finalement

$$\boxed{AM - MA = \lambda M \iff DN - ND = \lambda N}$$

Rappelons peut-être que, lorsque l'on multiplie les deux termes d'une égalité matricielle par une matrice inversible (multiplication à droite ou à gauche), on obtient une égalité équivalente.

**4)**

**∗ 4.1**

- Soit $N = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} DN - ND &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

L'équation $DN - ND = (0)$ équivaut à $\begin{pmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{pmatrix} = (0)$, donc à $b = c = 0$

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker}\varphi_A &= \{N = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \ / \ b = c = 0\} \\ &= \{N = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ (a,d) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{N = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ (a,d) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

**∗ 4.2**

Revenons aux matrices $M$ :

$M = PNP^{-1}$, donc

$N = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \iff P^{-1}MP = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Multiplions les deux termes de cette égalité par $P$ à gauche et $P^{-1}$ à droite, on obtient


Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

$$M = P(a\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix})P^{-1}$$

$$= aP\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}P^{-1} + dP\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}P^{-1}$$

$$= a\begin{pmatrix}1&1\\3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&1\\3&-1\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}1&1\\3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&1\\3&-1\end{pmatrix}$$

$$= a\begin{pmatrix}1&0\\3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&1\\3&-1\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}0&1\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&1\\3&-1\end{pmatrix}$$

$$= a\begin{pmatrix}-2&1\\-6&3\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}3&-1\\6&-2\end{pmatrix}$$

**Conclusion :** $\operatorname{Ker}\varphi_A = \operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix}-2&1\\-6&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3&-1\\6&-2\end{pmatrix}\right) = \operatorname{vect}(A_1, A)$

***Remarque*** : On peut tout de suite noter que

- $\dim \operatorname{Ker}\varphi_A = 2$, puisque les matrices $A$ et $A_1$ ne sont pas proportionnelles et forment donc une famille libre.
- $\operatorname{Ker}\varphi_A = E(0, \varphi_A)$ (sous-espace propre de $\varphi_A$ associé à la valeur propre 0).

**∗ 4.3**

- Résolvons l'équation $DN - ND = (-1)N = -N$. Soit $N = \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ; cette égalité équivaut à $\begin{pmatrix}0&-b\\c&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-a&-b\\-c&-d\end{pmatrix}$, ce qui donne $a = c = d = 0$

$$\{N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \ / \ DN - ND = -N\} = \{N = \begin{pmatrix}0&b\\0&0\end{pmatrix}, \ b \in \mathbb{R}\}$$

- • Résolvons l'équation $DN - ND = N$. Avec les mêmes notations, cette égalité équivaut à $\begin{pmatrix}0&-b\\c&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ ; ce qui donne $a = b = d = 0$

$$\{N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \ / \ DN - ND = N\} = \{N = \begin{pmatrix}0&0\\c&0\end{pmatrix}, \ c \in \mathbb{R}\}$$

**4.4** D'après ce que nous avons fait dans la question **4.1**

Equation $DN - ND = -N$

$$N = b\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} \iff P^{-1}MP = b\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$$
$$\iff M = bP\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}P^{-1} \quad \text{multiplications à gauche par } P, \text{ à droite par } P^{-1}$$
$$\iff M = b\begin{pmatrix}1&1\\3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&1\\3&-1\end{pmatrix}$$
$$\iff M = b\begin{pmatrix}0&1\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&1\\3&-1\end{pmatrix}$$
$$\iff M = b\begin{pmatrix}3&-1\\9&-3\end{pmatrix}$$

**Conclusion :** $E(-1, \varphi_A) = \operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix}3&-1\\9&-3\end{pmatrix}\right)$ : $\dim E(-1, \varphi_A) = 1$


© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Equation $DN - ND = N$

$$N = c\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} \iff M = cP\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}P^{-1}$$
$$\iff M = c\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}$$
$$\iff M = c\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}$$
$$\iff M = c\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -4 & 2\end{pmatrix}$$

**Conclusion :** $E(1,\varphi_A) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -4 & 2\end{pmatrix}\right)$ : $\dim E(1,\varphi_A) = 1$

**5)**

L'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est de dimension 4.

$\varphi_A$ est un endomorphisme d'un espace de dimension 4, il possède 3 valeurs propres $-1, 0, 1$ et la somme des dimensions des trois sous-espaces propres associés est égale à 4 : **l'endomorphisme $\varphi_A$ est diagonalisable**

## EXERCICE III

### 3.1 Mode paiement de la clientèle

**1)**

**1.1)**

- $S$ et $U$ ne prennent que les valeurs 0 et 1 : ce sont des variables de Bernoulli.

On obtient la loi de $S$ comme loi marginale du couple $(S, U)$

- Loi de $S$

$P(S=0) = P(S=0 \cap U=0) + P(S=0 \cap U=1) = 0,4 + 0,3 = 0,7$

$P(S=1) = 1 - P(S=0) = 0,3$

$S$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $0,3$

- Loi de $U$

$P(U=0) = P(U=0 \cap S=0) + P(U=0 \cap S=1) = 0,4 + 0,2 = 0,6$

$P(U=1) = 1 - 0,6 = 0,4$

$U$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $0,4$

- L'événement " le client paie par carte bancaire " est l'événement $(U=0)$, dont la probabilité est $0,6 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

**1.2)**

$\text{cov}(S,U) = E(SU) - E(S)E(U)$.

La variable $SU$ ne prend que les valeurs 0 et 1 ; c'est aussi une variable de Bernoulli : son espérance existe et vaut son paramètre, c'est-à-dire $E(SU) = P(SU=1) = P(S=1 \cap U=1) = 0,1$

$E(S) = P(S=1) = 0,3$ et $E(U) = P(U=1) = 0,4$.

Par suite $\boxed{\text{cov}(S,U) = 0,1 - 0,4 \times 0,3 = -0,02}$

$\boxed{\text{cov}(S,U) \neq 0 \Longrightarrow S \text{ et } U \text{ ne sont pas indépendantes}}$

***Remarque*** : On avait ce résultat plus simplement, car

$P(S=0 \cap U=0) = 0,4$ et $P(S=0) \times P(U=0) = 0,7 \times 0,6 = 0,42 \neq 0,4$


© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

**1.3)**

L'événement " la somme payée est strictement supérieure à 50 euros est l'événement $(S = 1)$ ; l'événement " le client utilise un autre moyen de paiement que la carte bancaire " est l'événement $(U = 1)$.

On veut $P_{U=1}(S = 1) = \dfrac{P(S = 1 \cap U = 1)}{P(U = 1)} = \dfrac{0,1}{0,4} = 0,25$

**2)**

**2.1)**

Chaque expérience " le client paie par carte bancaire " est une expérience de Bernoulli, de paramètre $P(U = 0) = 0,6$. Comme les modes de paiement des différents clients sont indépendants les uns des autres, ces expériences de Bernoulli le sont aussi.

**La variable $C_n$ prend pour valeurs le nombre de succès (paiement par cartes bancaires) obtenus au cours de la réalisation de $n$ expériences de Bernoulli, indépendantes et de même paramètre** $0,6$

**La variable $C_n$ suit la loi binomiale de paramètres** $(n; 0,6)$

$$E(C_n) = 0,6 \times n \text{ et } V(C_n) = 0,24 \times n$$

**2.2)**

- $L_1(\Omega) = [\![0, n]\!]$ car le premier succès (utilisation de la carte bancaire) peut se produire à un rang quelconque entre 1 et $n$ et si cet événement ne se produit pas, on donne à $L_1$ la valeur 0.

Notons, pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, $U_k$ la variable aléatoire de Bernoulli qui prend la valeur 1 si et seulement si le $k$ ème acheteur utilise une carte bancaire et la valeur 0 sinon. **La variable $U_k$ suit la même loi que $U$ et les variables $U_k$ sont mutuellement indépendantes**.

$(L_1 = 0) = \bigcap_{j=1}^{n} (U_j = 1)$.

Par indépendance des variables $P(L_1 = 0) = \prod_{j=1}^{n} P(U_j = 1) = \prod_{j=1}^{n} 0,4 = (0,4)^n$

Soit $k \in [\![2, n]\!]$ ;

$(L_1 = k) = \Big(\bigcap_{j=1}^{k-1} (U_j = 1)\Big) \cap (U_k = 0)$.

Toujours grâce à l'indépendance des variables $U_j$,

$P(L_1 = k) = \Big(\prod_{j=1}^{k-1} P(U_j = 1)\Big) \times P(U_k = 0) = (0,4)^{k-1} \times 0,6$

$P(L_1 = 1) = P(U_1 = 0) = 0,6$ ; on remarque que la formule précédente est valable pour $k = 1$.

Finalement : $\forall k \in [\![1, n]\!],\ P(L_1 = k) = (0,4)^{k-1} \times 0,6$ et $P(L_1 = 0) = (0,4)^n$

- Vérifions que la somme des probabilités vaut bien 1.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} P(L_1 = k) &= \sum_{k=1}^{n} P(L_1 = k) + P(L_1 = 0) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (0,4)^{k-1} \times 0,6 + (0,4)^n \\ &= 0,6 \frac{(0,4)^n - 1}{0,4 - 1} + (0,4)^n\end{aligned}$$

On a reconnu la somme des $n$ premiers termes d'une suite géométrique de raison $0,4 \neq 1$ et de premier terme $0,6$.


© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} P(L_1 = k) &= 0,6\frac{1-(0,4)^n}{1-0,4} + (0,4)^n \\ &= 0,6\frac{1-(0,4)^n}{0,6} + (0,4)^n \\ &1-(0,4)^n + (0,4)^n = 1\end{aligned}$$

**2.3)**

- Loi de $L_2$

$L_2(\Omega) = \{0, 2, 3 \ldots, n\}$ car le deuxième succès peut apparaître à l'un quelconque des rangs entre 2 et $n$ et s'il n'apparaît pas, alors la variable $L_2$ prend la valeur 0

$(L_2 = 0)$ est l'événement " il y a eu zéro succès ou un succès exactement " ;

$(L_2 = 0) = (C_n = 0 \cup C_n = 1)$ ; c'est une réunion de deux événements incompatibles, donc

$$\begin{aligned}P(L_2 = 0) &= P(C_n = 0) + P(C_n = 1) \\ &= \binom{n}{0}(0,4)^n + \binom{n}{1}(0,6)(0,4)^{n-1} \\ &= (0,4)^n + n(0,6)(0,4)^{n-1} \\ &= (0,4)^{n-1}(0,4 + 0,6 \times n)\end{aligned}$$

Soit $k \in [\![2, n]\!]$. Notons $A_{k-1}$ l'événement " au cours des $k-1$ premières expériences, il y a eu exactement 1 succès "

Alors $(L_2 = k) = A_{k-1} \cap (U_k = 1)$. Par indépendance des expériences, les événements $A_{k-1}$ et $(U_k = 1)$ sont indépendants, il s'ensuit que $P(L_2 = k) = P(A_{k-1})P(U_k = 1)$.

La variable qui compte au cours des $(k-1)$ premières expériences le nombre de succès suit la loi binomiale de paramètres $(k-1; 0,6)$ (même justification que pour $C_n$).

Donc $P(A_{k-1}) = \binom{k-1}{1}(0,4)^{k-2}(0,6) = (k-1)(0,4)^{k-2}(0,6)$

$P(L_2 = k) = (k-1)(0,4)^{k-2}(0,6)(0,6) = (k-1)(0,4)^{k-2}(0,6)^2$.

**En résumé :**

$$\boxed{P(L_2 = 0) = (0,4)^{n-1}(0,4 + 0,6 \times n) \text{ et } \forall k \in [\![2, n]\!],\ P(L_2 = k) = (k-1)(0,4)^{k-2}(0,6)^2}$$

**3.2)**

**1)**

Une densité de $X$ est la fonction $f_X$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

$$E(X) = 1 \text{ et } V(X) = 1$$

**2)**

- La fonction $f$ est définie sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}_-^*$ (puisque c'est la fonction nulle) et sur $\mathbb{R}_+^*$ puisque c'est le produit de deux fonctions continues.
- La fonction $f$ est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$
- L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx = \int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$ ; on reconnaît l'intégrale qui vaut l'espérance de $X$ : donc cette intégrale existe et vaut 1. Or $f$ est nulle sur $\mathbb{R}_-^*$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^0 f(x)dx$ converge et vaut 0.

**Conclusion :** L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ est la somme de deux intégrales convergentes, donc elle converge, et vaut 1

$$\boxed{\textbf{La fonction } f \textbf{ est bien une densité de probabilité}}$$

- La variable $T$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ est absolument convergente. Sur $\mathbb{R}_-^*$, $xf(x)$ est nulle, donc $\displaystyle\int_{-\infty}^0 xf(x)dx$ est nulle, donc absolument convergente.


Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Sur $\mathbb{R}_+$, $xf(x) = x^2e^{-x}$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2e^{-x}dx$ est absolument convergente car elle vaut $E(X^2)$.

> $T$ admet une espérance puisque l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ est absolument convergente en tant que somme de deux intégrales absolument convergentes. De plus $E(T) = E(X^2) = V(X) + (E(X))^2$ (d'après la relation de Köenig-Huygens), donc $E(T) = 1 + 1 = 2$
>
> Le temps de passage moyen en caisse est donc de 2 unités

**2.1)**

Rappelons : $\forall x \in \mathbb{R},\ F_T(x) = P(T \leq x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$

Si $x < 0$ : l'intervalle d'intégration $]-\infty, x]$ est inclus dans l'intervalle $]-\infty, 0[$, sur lequel $f$ est nulle, donc $\forall x \in ]-\infty, 0[,\ F_T(x) = 0$.

$$\begin{aligned}\text{Si } x \geq 0 : F_T(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_0^x f(t)dt \quad \text{(les deux intégrales existent)} \\ &= 0 + \int_0^x te^{-t}dt\end{aligned}$$

Faisons dans cette dernière intégrale une intégration par parties :

$u(t) = t \Longrightarrow u'(t) = 1$ et $v'(t) = e^{-t} \Longleftarrow v(t) = -e^{-t}$ . Les fonctions $u$ et $v$ sont des classe $C^1$ sur $\mathbb{R}_+$, l'intégration par parties est légitime.

$$\begin{aligned}\int_0^x te^{-t}dt &= \big[-te^{-t}\big]_0^x + \int_0^x e^{-t}dt \\ &= -xe^{-x} - \big[e^{-t}\big]_0^x \\ &= -xe^{-x} - (e^{-x} - 1) \\ &= -(x+1)e^{-x} + 1\end{aligned}$$

> On a alors $F_T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - (x+1)e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

**2.2)**

On veut $P_{T\geq 1}(T \leq 2)$

$$\begin{aligned}P_{T\geq 1}(T \leq 2) &= \frac{P(T \geq 1 \cap T \leq 2)}{P(T \geq 1)} \\ &= \frac{P(1 \leq T \leq 2)}{1 - P(T < 1)} \\ &= \frac{F_T(2) - F_T(1)}{1 - F_T(1)} \\ &= \frac{1 - 3e^{-2} - (1 - 2e^{-1})}{1 - (1 - 2e^{-1})} \\ &= \frac{2e^{-1} - 3e^{-2}}{2e^{-1}} \\ &= 1 - \frac{3}{2e}\end{aligned}$$

$$\boxed{P_{T\geq 1}(T \leq 2) = 1 - \frac{3}{2e} = \frac{2e-3}{2e}}$$

**3)**

**3.1)**

$M$ est égal au minimum de $T_A$ et de $T_B$, car dès que l'un des deux clients a terminé, $M$ n'attend plus et se présente au guichet.


© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

On pourrait dire aussi : soit $t \geq 0$ ; dire que $M \geq t$ équivaut à dire qu'aucun des clients $A$ et $B$ n'a terminé avant le temps $t$, donc cela équivaut à dire que $(T_A \geq t)$ et $(T_B \geq t)$, donc cela revient à dire que $(t \leq T_A)$ et $(t \leq T_B)$, donc cela revient à dire que $t \leq \min(T_A, T_B)$

$$\boxed{M \geq t \Longleftrightarrow \min(T_A, T_B) \geq t \text{ : donc } M = \min(T_A, T_B)}$$

**3.2)**

Soit $t \in \mathbb{R}$. Reprenons le raisonnement précédent.

$P(M > t) = (T_A > t) \cap (T_B > t)$, donc par indépendance des variables $T_A$ et $T_B$, on a :

$$\begin{aligned} P(M > t) &= P(T_A > t)P(T_B > t) \\ &= (1 - P(T_A \leq t))^2 \quad \text{car } T_A \text{ et } T_B \text{ suivent la même loi.} \end{aligned}$$

Donc $\forall t \in \mathbb{R},\ 1 - P(M \leq t) = (1 - P(T \leq t))^2$ car $T_A$ suit la même loi que $T$

$$\text{Finalement } \forall t \in \mathbb{R},\ P(M \leq t) = 1 - (1 - F_T(t))^2$$

- Si $t < 0$, $F_T(t) = 0$, donc $P(M \leq t) = 1 - 1 = 0$.
- Si $t \geq 0$, $F_T(t) = 1 - (t+1)e^{-t}$, donc $1 - F_T(t) = (t+1)e^{-t}$ et

$P(M \leq t) = 1 - ((t+1)e^{-t})^2 = 1 - (t+1)^2 e^{-2t}$

$$\boxed{\text{En résumé : } P(M \leq t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - (t+1)^2 e^{-2t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}}$$

**3.3)**

Posons $\forall t \in \mathbb{R},\ F_M(t) = P(M \leq t)$. On sait que $F_M$ est une fonction de répartition (définie sur $\mathbb{R}$, croissante, $\lim\limits_{t \to -\infty} F_M(t) = 0$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} F_M(t) = 1$) ; cela peut se vérifier facilement avec l'expression de $F_M$.

Il faut maintenant montrer que $F_M$ est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $C^1$ sauf peut-être en un nombre fini de points.

Sur $\mathbb{R}_-^*$, $F_M$ est nulle, donc continue et de classe $C^1$.

Sur $\mathbb{R}_+^*$, $t \mapsto (t+1)^2$ est continue, de classe $C^1$ en tant que fonction polynomiale. $t \mapsto e^{-2t}$ est continue, de classe $C^1$ en tant que carré d'une fonction continue, de classe $C^1$ (en effet $e^{-2t} = (e^{-t})^2$). Donc, sur $\mathbb{R}_+^*$, $t \mapsto (t+1)^2 e^{-2t}$ est continue et de classe $C^1$.

$\lim\limits_{t \to 0^-} F_M(t) = 0$ sans problème.

$\lim\limits_{t \to 0^+} F_M(t) = \lim\limits_{t \to 0^+} (1 - (t+1)^2 e^{-2t}) = 1 - 1 = 0 = F_M(0)$

**Finalement,** $F_M$ est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^*$.

$$\boxed{\text{Tous les ingrédients sont réunis : } M \text{ est une variable à densité}}$$

- Regardons si $F_M$ est dérivable et continue au point $t = 0$.

Sur $\mathbb{R}_-^+$, $F_M$ est dérivable et $\forall t > 0,\ F_M'(t) = 0$

Sur $\mathbb{R}_+^*$, $F_M$ est dérivable et

$\forall t > 0,\ F_M'(t) = -2(t+1)e^{-2t} + 2(t+1)^2 e^{-2t} = 2t(t+1)e^{-2t}$. Il s'ensuit que $\lim\limits_{t \to 0^+} F_M'(t) = 0$

**Dans ces conditions :** $F_M'(0) = 0$ **et** $F_M'$ **est continue en** 0. C'est ce que l'on voit souvent appeler, de manière incorrecte, le théorème de prolongement des applications de classe $C^1$ qui est ici utilisé, à savoir :

$F_M$ est continue sur $\mathbb{R}$, de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et $\lim\limits_{x \to 0} F_M'(x) \in \mathbb{R}$, alors $F_M'(0)$ existe et vaut $\lim\limits_{x \to 0} F_M'(x) \in \mathbb{R}$.

Nous prendrons donc $f_M = F_M'$.

$$\boxed{\text{Une densité } f_M \text{ de } M \text{ est : } f_M(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ 2t(t+1)e^{-2t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}}$$


Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021