BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Code sujet : 297

CONCOURS D'ADMISSION DE 2014

Conception : ÉCOLE DE HAUTES ÉTUDES COMMERCIALES DU NORD

MATHÉMATIQUES

OPTION SCIENTIFIQUE

Mardi 6 mai 2014, de 8 h à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

On rappelle que la fonction Γ (gamma) est la fonction, qui à tout réel x strictement positif, associe $\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$. On admet que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

1) On considère deux variables aléatoires X et Y, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes, et suivant toutes deux la loi normale centrée réduite.
On pose $U = X^2$ et $V = Y^2$.

a) Montrer que la loi commune à U et V est la loi $\Gamma(2, \dfrac{1}{2})$.

b) Donner l'espérance et la variance de U et V.

2) On pose $W = U + V$ et on rappelle que W est une variable aléatoire, définie, elle aussi, sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

a) Donner sans calcul la loi de W ainsi que son espérance et sa variance.

b) On admet que, si f_U et f_V sont respectivement des densités de U et V, alors, une densité de W est la fonction f_W, nulle sur $]-\infty, 0[$, et définie sur $[0, +\infty[$ par : $f_W(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_U(t)f_V(x-t)\,dt$.

Justifier, sans calculer l'intégrale précédente, que :

$$\forall x \in [0, +\infty[,\ f_W(x) = \int_0^x f_U(t)f_V(x-t)\,dt$$

c) Pour tout réel x strictement positif, on pose $I(x) = \int_0^x \dfrac{1}{\sqrt{t(x-t)}}\,dt$.

Déduire des questions précédentes que l'intégrale $I(x)$ converge et donner sa valeur.

Exercice 2

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Si M désigne une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on désigne par $\mathrm{Tr}(M)$ la trace de la matrice M, c'est-à-dire la somme de ses éléments diagonaux.

On admet que l'application trace est une forme linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit A une matrice non nulle donnée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère l'application f qui à toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associe :

$$f(M) = \mathrm{Tr}(A)M - \mathrm{Tr}(M)A$$

1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2) Montrer que f n'est pas l'endomorphisme nul (on pourra distinguer les cas $\mathrm{Tr}(A)=0$ et $\mathrm{Tr}(A)\neq 0$).
3) a) Établir que, pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a : $(f \circ f)(M) = \mathrm{Tr}(A)\ f(M)$.
   b) Donner les valeurs propres possibles de f.
4) Montrer que 0 est valeur propre de f.
5) Montrer que, si $\mathrm{Tr}(A)=0$, alors f n'est pas diagonalisable.
6) On suppose dans cette question que la trace de A est non nulle.
   a) Quelle est la dimension de $\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$?
   b) Conclure que f est diagonalisable.

Exercice 3

Le but de cet exercice est de prouver l'existence et de donner la valeur (par deux méthodes différentes) de :

$$\Delta = \inf_{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \int_0^{+\infty} (t^3 - xt - y)^2 e^{-t} dt$$

Partie 1 : méthode utilisant un produit scalaire

Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 3 et F le sous-espace vectoriel de E engendré par les deux polynômes 1 et X.

1) a) Rappeler pourquoi, pour tout entier naturel k, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt$ converge.

   b) Montrer que l'application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ qui, à tout couple (P,Q) d'éléments de E, associe $\langle P,Q\rangle = \int_0^{+\infty} P(t)\, Q(t)\, e^{-t}\, dt$ est un produit scalaire sur E, dont la norme associée sera notée $\|\ \|$.

2) Soit Q un polynôme de F défini par $Q = xX + y$, où x et y sont deux réels. Donner, sous forme d'intégrale, l'expression de $\|X^3 - Q\|^2$.

3) a) Énoncer le théorème qui assure l'existence et l'unicité du polynôme Q_0 de F qui rend $\|X^3 - Q\|^2$ minimale.

   b) En déduire sans calcul les valeurs de $\langle X^3 - Q_0, 1\rangle$ et $\langle X^3 - Q_0, X\rangle$.

   c) En notant $Q_0 = x_0 X + y_0$, écrire le système que doit vérifier le couple (x_0, y_0) pour que $\int_0^{+\infty} (t^3 - xt - y)^2 e^{-t} dt$ soit minimale.

   d) Déterminer la valeur de Δ.

Partie 2 : méthode utilisant une fonction de deux variables

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, par :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R},\ f(x,y) = \int_0^{+\infty} (t^3 - xt - y)^2 e^{-t} dt$$

4) Écrire $f(x,y)$ comme une fonction polynomiale des deux variables x et y.
5) Déterminer le seul point critique (x_0, y_0) de f sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.
6) Montrer que f admet en (x_0, y_0) un minimum local m que l'on calculera.
7) Établir que ce minimum est global.

Problème

Question préliminaire

1) Soit x un réel quelconque.

a) Justifier que la fonction $t \mapsto \max(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

On considère maintenant l'intégrale $y = \int_0^1 \max(x,t)dt$.

b) Montrer que : $y = \begin{cases} \dfrac{1}{2} \text{ si } x \leq 0 \\ \dfrac{x^2+1}{2} \text{ si } 0 < x < 1 \\ x \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$.

Dans la suite de ce problème, on considère une variable aléatoire X définie sur un certain espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, que l'on ne cherchera pas à déterminer. On admet que l'on définit une variable aléatoire Y, elle aussi définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, en posant, pour tout ω de Ω :

$$Y(\omega) = \int_0^1 \max(X(\omega),t)dt$$

On se propose dans les deux parties suivantes de déterminer la loi de Y connaissant celle de X.

Partie 1 : étude de plusieurs cas où X est discrète

2) Vérifier que si X suit une loi géométrique alors on a : $Y = X$.

3) On suppose, dans cette question, que $X(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$ et que l'on a :

$$P(X=-1) = P(X=1) = \frac{1}{4}$$

a) Déterminer la valeur de $P(X=0)$.

b) Vérifier que $Y(\Omega) = \left\{\dfrac{1}{2}, 1\right\}$ puis donner la loi de Y, ainsi que son espérance et sa variance.

c) Compléter la déclaration de fonction suivante pour qu'elle simule la variable aléatoire Y.

```
Function y : real ;
Var u : integer ;
Begin
u : = random(4) ;
If ------ then ------ else y : = ------ ;
End ;
```

4) On suppose, dans cette question, que X suit la loi de Poisson de paramètre λ (où λ est un réel strictement positif).

a) Vérifier que $Y(\Omega) = \left\{\dfrac{1}{2}\right\} \cup \mathbb{N}^*$ puis donner la loi de Y.

b) En déduire l'espérance et la variance de Y.

Partie 2 : étude de plusieurs cas où X est à densité

On note, sauf indication contraire, respectivement F_X et F_Y les fonctions de répartition de X et Y.

5) On suppose, dans cette question, que X suit la loi uniforme sur $[0,1[$, avec $X(\Omega) = [0,1[$.

a) Vérifier, en utilisant la première question, que l'on a : $Y = \dfrac{X^2+1}{2}$.

b) En déduire $Y(\Omega)$.

c) Montrer alors que, pour tout x de $\left[\dfrac{1}{2},1\right[$, on a : $F_Y(x) = \sqrt{2x-1}$.

d) Expliquer pourquoi Y est une variable à densité.

e) Donner la valeur de $E(Y)$.

f) Compléter la déclaration de fonction suivante pour qu'elle simule la variable aléatoire Y.

```
Function y : real ;
Begin  y : = ------ ;  End ;
```

6) On suppose, dans cette question, que $X-1$ suit la loi exponentielle de paramètre λ (où λ est un réel strictement positif).

a) Toujours en utilisant la première question, exprimer Y en fonction de X.

b) Donner sans calcul l'espérance et la variance de Y.

c) Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0,1[$. Vérifier que la variable aléatoire $W=-\frac{1}{\lambda}\ln(1-U)$ suit la loi exponentielle de paramètre λ, puis compléter la déclaration de fonction suivante pour qu'elle simule la variable aléatoire Y.

```
Function y(lambda : real) : real ;
Begin y : = ------ ;
End ;
```

7) On suppose, dans cette question, que X suit la loi normale centrée réduite. On rappelle que $X(\Omega)=\mathbb{R}$ et on note Φ la fonction de répartition de X.

a) Vérifier que $Y(\Omega)=\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$.

b) Donner la valeur de $P\left(Y=\frac{1}{2}\right)$.

c) Utiliser la formule des probabilités totales associée au système complet d'événements $([X\leq 0],[0<X\leq 1],[X>1])$ pour établir l'égalité suivante :

$$F_Y(x)=\begin{cases} 0 \text{ si } x<\frac{1}{2} \\ \Phi\left(\sqrt{2x-1}\right) \text{ si } \frac{1}{2}\leq x\leq 1 \\ \Phi(x) \text{ si } x>1 \end{cases}$$

d) La variable aléatoire Y est-elle à densité ? Est-elle discrète ?

e) Soit $U_1,\ldots,U_{48}$ des variables indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur $[0,1]$. Expliquer pourquoi on peut approcher la loi de la variable aléatoire $\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{48}U_k-24\right)$ par la loi normale centrée réduite, puis compléter la déclaration de fonction suivante pour qu'elle simule Y.

```
Function y(lambda : real) : real ;
Var k : integer ;  aux : real ;
Begin
aux : = 0 ;
For k : = 1 to 48 do aux : = aux + random ;
x : = (aux-24)/2 ;
If ------  then  y : = ------  else
                                   If ------ then  y : = ------  else  y : = ------ ;
End ;
```

ANNALES DE MATHEMATIQUES 2014

EDHEC 2014 VOIE S

CORRIGE

Le langage Pascal n'étant plus du programme, nous n'avons pas traité les questions d'informatique.

EXERCICE I

1–a)

$U(\Omega) = \mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned}\forall x > 0,\ P(U \leq x) &= P(X^2 \leq x)\\ &= P(|X| \leq \sqrt{x}) \quad \text{(la fonction racine carrée est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^*)\\ &= P(-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x})\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \exp(-\frac{t^2}{2})dt\\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\sqrt{x}} \exp(-\frac{t^2}{2})dt \quad \text{car la fonction } t \mapsto \exp(-\frac{t^2}{2}) \text{ est paire sur } \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Faisons le changement de variable $u = t^2$ qui est C^1, bijectif, sur $\mathbb{R}_+^*$, donc légitime.

$t = \sqrt{u}$; $dt = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}du$, donc

$$\begin{aligned}\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\sqrt{x}} \exp(-\frac{t^2}{2})dt &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{x} \frac{1}{2\sqrt{u}}\exp(-\frac{u}{2})du\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{x} u^{-\frac{1}{2}}\exp(-\frac{u}{2})du\end{aligned}$$

Or $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}u^{-\frac{1}{2}}\exp(-\frac{u}{2}) = \dfrac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\dfrac{u^{-\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}}\exp(-\frac{u}{2}) = \dfrac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\dfrac{u^{\frac{1}{2}-1}}{2^{\frac{1}{2}}}\exp(-\frac{u}{2})$.

Notons F_U la fonction de répartition de la variable U.

$\forall x > 0,\ F_U(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\frac{u^{\frac{1}{2}-1}}{2^{\frac{1}{2}}}\exp(-\frac{u}{2})du$. Donc $\forall x > 0,\ F_U'(x) = \dfrac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\dfrac{x^{\frac{1}{2}-1}}{2^{\frac{1}{2}}}\exp(-\frac{x}{2})$.

Si l'on note f_U une densité de U, on pourra prendre :

$$f_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \dfrac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\dfrac{x^{\frac{1}{2}-1}}{2^{\frac{1}{2}}}\exp(-\frac{x}{2}) & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Comme U et V suivent la même loi, on conclut :

$$\boxed{\text{les variables } U \text{ et } V \text{ suivent la loi } \Gamma(2, \tfrac{1}{2})}$$

Une autre démonstration.
$\forall x > 0,\ P(U \le x) = P(-\sqrt{x} \le X \le \sqrt{x}) = \Phi(\sqrt{x}) - \Phi(-\sqrt{x})$, où Φ est la fonction de répartition d'une variable qui suit la loi normale centrée, réduite.
On sait d'après le cours que $\Phi(\sqrt{x}) + \Phi(-\sqrt{x}) = 1$, donc
$\forall x > 0,\ P(U \le x) = \Phi(\sqrt{x}) - (1 - \Phi(\sqrt{x})) = 2\Phi(\sqrt{x}) - 1$.
La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. La fonction Φ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc par composition la fonction $x \mapsto \Phi(\sqrt{x})$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Il s'ensuit que F_U est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x > 0,\ F'_U(x) = 2\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\varphi(\sqrt{x})$ où φ est la densité continue sur $\mathbb{R}$ de la loi normale centrée, réduite.

$\forall x > 0,\ f_U(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{x}{2}) = \dfrac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\dfrac{x^{\frac{1}{2}-1}}{2^{\frac{1}{2}}}\exp(-\frac{x}{2})$. On retrouve le résultat précédent.

1–b)

D'après le cours, $\boxed{E(U) = 2 \times \frac{1}{2} = 1 \text{ et } V(U) = 2^2 \times \frac{1}{2} = 2}$

2–a)

Les variables X et Y sont indépendantes, donc les variables $U = X^2$ et $V = Y^2$ sont indépendantes. D'après les stabilités des lois Gamma, la variable $U + V$ suit la loi $\Gamma(2, 1)$. Or la loi $\Gamma(2, 1)$ est la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$.

$$\boxed{\text{La variable } W \text{ suit la loi exponentielle } \mathcal{E}(\tfrac{1}{2})}$$

D'après le cours, $E(W) = 2$ et $V(W) = 4$.

2–b)

$\forall x > 0,\ f_W(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_U(t) f_V(x - t)dt$.

Or $f_U(t)f_V(x - t) \ne 0 \iff t > 0 \text{ et } x - t > 0 \iff 0 < t < x$. On a donc immédiatement

$$\boxed{\forall x > 0,\ f_W(x) = \int_0^x f_U(t) f_V(x - t)dt}$$

2–c)

Remplaçons $f_U(t)$ et $f_V(x - t)$ par leurs expressions.

$$\begin{aligned}\forall x > 0,\ f_W(x) &= \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} t^{-\frac{1}{2}} \exp(-\frac{t}{2}) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (x - t)^{-\frac{1}{2}} \exp(-\frac{x - t}{2})dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{x - t}} \exp(-\frac{x}{2})dt \\ &= \frac{\exp(-\frac{x}{2})}{2\pi} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{t(x - t)}}dt = \frac{\exp(-\frac{x}{2})}{2\pi} I(x)\end{aligned}$$

Donc $I(x) = 2\pi f_W(x) \exp(\frac{x}{2})\cdot$ Cela prouve déjà que $I(x)$ existe.

Or W suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(\frac{1}{2})$, donc $\forall x > 0,\ f_W(x) = \frac{1}{2}\exp(-\frac{x}{2})$. Il vient alors immédiatement

$$\boxed{\forall x > 0,\ I(x) = \pi}$$

EXERCICE II

1)

Il est clair que $f(M)$ appartient à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour tout élément M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$\forall (M,N) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},$

$$\begin{aligned} f(M+\lambda N) &= \mathrm{Tr}\,(A)(M+\lambda N) - \mathrm{Tr}\,(M+\lambda N)A \\ &= \mathrm{Tr}\,(A)M + \lambda\,\mathrm{Tr}(A)N - (\mathrm{Tr}(M) + \lambda\,\mathrm{Tr}(N))A \quad \text{(linéarité de la trace)} \\ &= \mathrm{Tr}(A)M - \mathrm{Tr}(M)A + \lambda(\mathrm{Tr}(A)N - \mathrm{Tr}(N)A) = f(M) + \lambda f(N) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'application } f \text{ est un endomorphisme de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$$

2)

- $\mathrm{Tr}(A) = 0$. Donc $f(M) = -\mathrm{Tr}(M)A$. Par suite $f(I_n) = -nA$.

Par hypothèse, $A \neq (0)$ (où (0) est la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$), donc f n'est pas nul.

- $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$. Raisonnons par l'absurde.

Si f est nul, alors $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{Tr}(A)M = \mathrm{Tr}(M)A$, donc $M = \dfrac{\mathrm{Tr}(M)}{\mathrm{Tr}(A)}A$. Ceci signifie que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{vect}(A)$. L'inclusion réciproque étant évidente, on aurait $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{vect}(A)$.

Or $\mathrm{Tr}(A) \neq 0 \Longrightarrow A \neq (0)$, donc $\dim \mathrm{vect}(A) = 1$.

L'égalité $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{vect}(A)$ est impossible car $\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = n^2 > 1$. Donc f n'est pas nul

$$\boxed{\text{L'endomorphisme } f \text{ n'est pas l'endomorphisme nul}}$$

3–a)

$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ f(M) = \mathrm{Tr}(A)M - \mathrm{Tr}(M)A$, donc $f(f(M)) = \mathrm{Tr}(A)f(M) - \mathrm{Tr}(f(M))A$.

Or par linéarité de la trace,

$\mathrm{Tr}(f(M)) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Tr}(A)M - \mathrm{Tr}(M)A) = \mathrm{Tr}(A)\,\mathrm{Tr}(M) - \mathrm{Tr}(M)\,\mathrm{Tr}(A) = 0.$

Par suite $\boxed{f(f(M)) = \mathrm{Tr}(A)f(M)}$

3–b)

$f(f(M)) = \mathrm{Tr}(A)f(M) \Longleftrightarrow f(f(M)) - \mathrm{Tr}(A)f(M) = (0) \Longleftrightarrow ((f \circ f) - \mathrm{Tr}(A)f)(M) = (0).$

Il apparaît que $f^2 - \mathrm{Tr}(A)f$ est l'endomorphisme nul de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\boxed{\text{Le polynôme (non nul) } P = X^2 - \mathrm{Tr}(A)X \text{ est annulateur de } f}$$

3–c)

D'après le cours, les valeurs propres possibles de f sont les racines du polynôme annulateur P, c'est-à-dire 0 ou $\mathrm{Tr}(A)$.

$$\boxed{\mathrm{spect}(f) \subset \{0, \mathrm{Tr}(A)\}}$$

4)

$f(A) = (0)$ de manière évidente. $A \neq (0) \Longrightarrow$ $\boxed{0 \text{ est valeur propre de } A}$

5)

Si $\mathrm{Tr}(A) = 0$, alors f admet une seule valeur propre : 0.

Si f est diagonalisable, il existe une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, dans laquelle la matrice de f est la matrice diagonale nulle. Donc f est nulle, ce qui est contraire au résultat de la question 2). Conclusion :

$$\boxed{\mathrm{Tr}(A) = 0 \Longrightarrow f \text{ non diagonalisable}}$$

Remarque : on pouvait aussi raisonner ainsi. L'endomorphisme f n'est pas nul, donc, si l'on note $E(\lambda, f)$ le sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ, $E(0, f) \neq \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Comme 0 est la seule valeur propre de f, f n'est pas diagonalisable.

6–a)

La trace est une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$. Son image est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$, donc de dimension 0 ou 1. Par hypothèse, $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$, donc $\mathrm{Im}\,\mathrm{Tr} \neq \{0\}$ et par suite $\dim \mathrm{Im}\,\mathrm{Tr} = 1$.

Appliquons le théorème du rang, on obtient : $n^2 = \dim \mathrm{Im}\,\mathrm{Tr} + \dim \mathrm{Ker}\,\mathrm{Tr}$.

$$\boxed{\dim \mathrm{Ker}\,\mathrm{Tr} = n^2 - 1}$$

6–b)

$$\begin{aligned}
\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ f(M) = \mathrm{Tr}(A)M &\iff \mathrm{Tr}(A)M - \mathrm{Tr}(M)A = \mathrm{Tr}(A)M \\
&\iff \mathrm{Tr}(M)A = (0) \\
&\iff M \in \mathrm{Ker}\,\mathrm{Tr} \quad \text{car } A \neq (0)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathrm{Tr}(A) \text{ est valeur propre de } f \text{ et } E(\mathrm{Tr}(A), f) = \mathrm{Ker}\,\mathrm{Tr} : \dim E(\mathrm{Tr}(A), f) = n^2 - 1}$$

On a vu que 0 est aussi valeur propre de f, donc $\dim E(0, f) \geq 1$. Il en résulte que $\dim E(\mathrm{Tr}(A), f) + \dim E(0, f) \geq n^2$, donc

$$\boxed{\dim E(\mathrm{Tr}(A), f) + \dim E(0, f) = n^2 = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : f \text{ est diagonalisable}}$$

On peut remarquer que $\dim E(0, f) = 1$; or $A \in E(0, f)$, $A \neq (0)$, donc $E(0, f) = \mathrm{vect}(A)$.

EXERCICE III

Partie 1 : méthode utilisant un produit scalaire

1–a)

Envisageons une variable aléatoire X qui suit la loi $\Gamma(k+1, 1)$. Une densité de X est f_{k+1} donnée par : $f_{k+1}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \leq 0 \\ \dfrac{1}{\Gamma(k+1)} t^{k+1-1} e^{-t} & \text{si} \quad t > 0 \end{cases}$

On sait que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{k+1}(t)dt = \int_0^{+\infty} f_{k+1}(t)dt = 1$,

donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} t^{k+1-1} e^{-t} dt$ existe et vaut $\Gamma(k+1) = k!$.

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ I_k = \int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt = k!}$$

1–b)

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$ est impropre uniquement en $+\infty$ puisque la fonction que l'on intègre est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Si PQ n'est pas le polynôme nul, il équivaut en $+\infty$ à son terme de plus haut degré : il existe $r \in \mathbb{N}$ et $a_r \in \mathbb{R}^*$ tel que $P(t)Q(t)e^{-t} \underset{(+\infty)}{\sim} a_r t^r e^{-t}$.

Donc $|P(t)Q(t)e^{-t}| \underset{(+\infty)}{\sim} |a_r| t^r e^{-t}$. D'après le point précédent l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} |a_r| t^r e^{-t} dt$ converge.

Par équivalence des fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} |P(t)Q(t)e^{-t}| dt$ converge.

$\displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt$ est absolument convergente, donc convergente.

$$\forall (P,Q) \in E^2,\ \langle P, Q \rangle \text{ existe.}$$

1–c)

$$\begin{aligned}
\forall (P,Q,R) \in E^3,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \langle P + \lambda Q, R \rangle &= \int_0^{+\infty} (P(t) + \lambda Q(t)) R(t) e^{-t} dt \\
&= \int_0^{+\infty} P(t)R(t)e^{-t} dt + \lambda \int_0^{+\infty} Q(t)R(t)e^{-t} dt \\
&\quad \text{par linéarité des intégrales convergentes} \\
&= \langle P, R \rangle + \lambda \langle Q, R \rangle
\end{aligned}$$

C'est la linéarité par rapport à la première variable de $(P,Q) \mapsto \langle P, Q \rangle$. Il est clair que $(P,Q) \mapsto \langle P, Q \rangle$ est symétrique, donc l'application $(P,Q) \mapsto \langle P, Q \rangle$ est une forme bilinéaire, symétrique.

$\langle P, P \rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} P^2(t) e^{-t} dt \geq 0$ car $P^2(t)e^{-t} \geq 0$ et les bornes sont dans l'ordre croissant.

De plus, $\displaystyle\int_0^{+\infty} P^2(t) e^{-t} dt = 0 \iff \forall t \geq 0,\ P^2(t)e^{-t} = 0$ car cette fonction est continue, positive (ou nulle) sur $\mathbb{R}_+$. Comme $e^{-t} \neq 0$, on conclut que $P^2(t) = 0$, donc $P(t) = 0$ sur $\mathbb{R}_+$. Le polynôme P admet une infinité de racines, c'est donc le polynôme nul. En résumé,

$$\boxed{\text{L'application } (P,Q) \in E^2 \mapsto \langle P, Q \rangle \text{ est une forme bilinéaire, symétrique, définie, positive : c'est donc un produit scalaire sur } E}$$

2)

$$||X^3 - Q||^2 = \int_0^{+\infty} (t^3 - Q(t))^2 dt = \int_0^{+\infty} (t^3 - xt - y)^2 dt.$$

3–a)

D'après le théorème de la meilleure approximation, il existe un unique élément $Q_0 \in F$ tel que $||X^3 - Q||$, pour $Q \in F$, soit minimale.

$$\boxed{Q_0 \text{ est le projeté orthogonal de } X^3 \text{ sur } F = \operatorname{vect}(1, X)}$$

3–b)

Q_0 est le projeté orthogonal de X^3 sur $\operatorname{vect}(1,X)$ équivaut à $X^3 - Q_0 \in F^\perp$. Or la famille $(1, X)$ est une base de F, donc

$$X^3 - Q_0 \in F^\perp \iff \langle X^3 - Q_0, 1 \rangle = \langle X^3 - Q_0, X \rangle = 0.$$

3–c)

L'équivalence précédente traduit le fait que

$$\boxed{Q_0 \text{ est déterminé par le système } \begin{cases} \langle X^3 - Q_0, 1 \rangle &= 0 \\ \langle X^3 - Q_0, X \rangle &= 0 \end{cases}}$$

3–d)

Résolvons ce système.

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^{+\infty}(t^3-x_0t-y_0)e^{-t}dt &= 0\\ \displaystyle\int_0^{+\infty}(t^3-x_0t-y_0)te^{-t}dt &= 0\end{cases} \iff \begin{cases} \displaystyle\int_0^{+\infty}t^3e^{-t}dt - x_0\int_0^{+\infty}te^{-t}dt - y_0\int_0^{+\infty}e^{-t}dt &= 0\\ \displaystyle\int_0^{+\infty}t^4e^{-t}dt - x_0\int_0^{+\infty}t^2e^{-t}dt - y_0\int_0^{+\infty}te^{-t}dt &= 0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} I_3-x_0I_1-y_0I_0 &= 0\\ I_4-x_0I_2-y_0I_1 &= 0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3!-x_01!-y_00! &= 0\\ 4!-x_02!-y_01! &= 0\end{cases}$$

On obtient $\begin{cases} x_0+y_0 &= 6\\ 2x_0+y_0 &= 24\end{cases}$ puis sans problème

$$\boxed{x_0 = 18 \text{ et } y_0 = 6-18 = -12. \quad Q_0 = 18X-12}$$

- Calcul du minimum Δ.

$$\begin{aligned}\Delta &= \int_0^{+\infty}(t^3-18t+12)^2e^{-t}dt\\ &= \int_0^{+\infty}(t^6+18^2t^2+144-36t^4+24t^3-2\times 18\times 12t)e^{-t}dt\\ &= I_6+324I_2+144I_0-36I_4+24I_3-432I_1\\ &= 720+324\times 2+144-36\times 24+24\times 6-432.\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Le minimum est : } \Delta = 360}$$

Partie 2 : méthode utilisant une fonction de deux variables

4)

$$\begin{aligned}f(x,y) &= \int_0^{+\infty}(t^3-xt-y)^2e^{-t}dt\\ &= \int_0^{+\infty}(t^6+x^2t^2+y^2-2xt^4-2yt^3+2xyt)e^{-t}dt\\ &= I_6+x^2I_2+y^2I_0-2xI_4-2yI_3+2xyI_1\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x,y) = 2x^2+y^2+2xy-48x-12y+720}$$

5)

La fonction f est de classe C^1 (et même C^2) en tant que fonction polynomiale définie sur $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 4x+2y-48\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 2x+2y-12\end{cases}$$

$(x,y)\in\mathbb{R}^2$ est un point critique de f si et seulement si $\begin{cases} 2x+y &= 24\\ x+y &= 6\end{cases}$

On trouve, bien-sûr, $x = 18$ et $y = -12$.

6)

Le théorème de Schwarz s'applique puisque f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$. Employons les notations de Monge.

$$\begin{aligned} r(x,y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= 4 \\ s(x,y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &= 2 \\ t(x,y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= 2 \end{aligned}$$

$(s^2 - rt)(18,-12) = 4 - 8 = -4 < 0$. Il y a au point $(18,-12)$ un extremum local pour f. Or $r(18,-12) = 4$. Cet extremum est un minimum.

$$\boxed{f \text{ présente au point } (18,-12) \text{ un minimum local}}$$

7)

Montrons que ce minimum local est un minimum absolu.

Soit $(x_0, y_0) = (18, -12)$. Posons $x = x_0 + a$ et $y = y_0 + b$.

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(x_0 + a, y_0 + b) \\ &= 2(x_0 + a)^2 + (y_0 + b)^2 + 2(x_0 + a)(y_0 + b) - 48(x_0 + a) - 12(y_0 + b) + 720 \\ &= 2x_0^2 + 2a^2 + 4x_0 a + y_0^2 + b^2 + 2y_0 b + 2x_0 y_0 + 2x_0 b + 2y_0 a + 2ab \\ &\quad -48x_0 - 48a - 12y_0 - 12b + 720 \\ &= (2x_0^2 + y_0^2 + 2x_0 y_0 - 48x_0 - 12y_0 + 720) + 2a^2 + b^2 + 2ab \\ &\quad +a(4x_0 + 2y_0 - 48) + b(2x_0 + 2y_0 - 12) \\ &= f(x_0, y_0) + 2a^2 + b^2 + 2ab + a \times 0 + b \times 0 \end{aligned}$$

Car (x_0, y_0) est le point critique de f, donc vérifie les relations de la question 5).

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) - f(x_0,y_0) = 2a^2 + b^2 + 2ab = (a+b)^2 + a^2 \geq 0$.

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) \geq f(x_0,y_0) : f \text{ présente en } (x_0,y_0) \text{ un minimum absolu}}$$

PROBLEME

question préliminaire

1–a)

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \max(x,t) = \begin{cases} t & \text{si} \quad x < t \\ x & \text{si} \quad x \geq t \end{cases}$$

Sur $]-\infty, x[\cup]x, +\infty[$, $t \mapsto \max(x,t)$ est continue en tant que fonction polynomiale.

$\max(x,x) = x$;

$\lim\limits_{t \to x^-} \max(x,t) = \lim\limits_{t \to x^-} t = x = \max(x,x)$; donc $t \mapsto \max(x,t)$ est continue en x à gauche.

$\lim\limits_{t \to x^+} \max(x,t) = \lim\limits_{t \to x^+} x = x = \max(x,x)$; donc $t \mapsto \max(x,t)$ est continue en x à droite.

Conclusion : $t \mapsto \max(x,t)$ est continue au point x.

$$\boxed{\text{La fonction } t \mapsto \max(x,t) \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$$

1–b)

$x \leq 0 \Longrightarrow \forall t \in [0,1],\ x \leq t$, donc $y = \displaystyle\int_0^1 \max(x,t)dt = \int_0^1 t dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$.

$x \geq 1 \Longrightarrow \forall t \in [0,1],\ t \leq x$, donc $y = \displaystyle\int_0^1 \max(x,t)dt = \int_0^1 x dt = x$.

$0 \leq x \leq 1$.

$$\begin{aligned} y &= \int_0^x \max(x,t)dt + \int_x^1 \max(x,t)dt \\ &= \int_0^x xdt + \int_x^1 tdt = x^2 + \left[\frac{t^2}{2}\right]_x^1 \\ &= x^2 + \frac{1-x^2}{2} = \frac{x^2+1}{2}. \end{aligned}$$

$$\boxed{y = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \frac{x^2+1}{2} & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ x & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}}$$

Partie 1 : étude de plusieurs cas où X est discrète

2)

$X \hookrightarrow \mathcal{G}(p) \Longrightarrow X(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Donc $\forall \omega \in \Omega,\ X(\omega) \geq 1$.
Par suite, d'après la question 1–b), $\forall \omega \in \Omega,\ Y(\omega) = X(\omega)$.

$$\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{G}(p) \Longrightarrow Y = X}$$

3–a)

$P(X=0) = 1 - P(X=1) - P(X=-1) = \frac{1}{2}$

3–b)

$\forall \omega \in \Omega,\ X(\omega) \in \{-1, 0\} \Longrightarrow Y(\omega) = \frac{1}{2}$ et $X(\omega) = 1 \Longrightarrow Y(\omega) = X(\omega) = 1$.

$$Y(\Omega) = \left\{\frac{1}{2}, 1\right\}$$

$P(Y = \frac{1}{2}) = P(X = -1 \cup X = 0) = P(X=-1) + P(X=0) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$.

$P(Y=1) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$. . On aurait pu dire $(Y=1) = (X=1)$.

$E(Y) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \boxed{\frac{5}{8}}$

$E(Y^2) = \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{7}{16}$. Donc $V(Y) = \frac{7}{16} - \frac{25}{64} = \boxed{\frac{3}{64}}$

3–c)

Hors programme.

4–a)

Rappelons que $X(\Omega) = \mathbb{N}$.
Si $X = 0$, alors $Y = \frac{1}{2}$.
Si $X \neq 0$, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ / $X = k$, donc $Y = k$ puisque $X(\omega) \geq 1 \Longrightarrow Y(\omega) = X(\omega)$.

$$Y(\Omega) \subset \left\{\frac{1}{2}\right\} \cup \mathbb{N}^*$$

Réciproquement, il est clair que $\frac{1}{2} \in Y(\Omega)$.

$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \exists \omega \in \Omega$ / $X(\omega) = k$, donc $Y(\omega) = k$, et par suite $\left\{\frac{1}{2}\right\} \cup \mathbb{N}^* \subset Y(\Omega)$.

$$\boxed{Y(\Omega) = \left\{\frac{1}{2}\right\} \cup \mathbb{N}^*}$$

$P(Y = \frac{1}{2}) = P(X = 0) = e^{-\lambda}$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(Y = n) = P(X = n) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^n}{n!}$.

$$\boxed{P(Y = \tfrac{1}{2}) = e^{-\lambda}\ ;\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(Y = n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}}$$

4–b)

Sous réserve de convergence de la série (l'absolue convergence n'est pas nécessaire car $Y \geq 0$),

$$\begin{aligned} E(Y) &= \tfrac{1}{2}P(Y = \tfrac{1}{2}) + \sum_{n=1}^{+\infty} nP(Y = n) \\ &= \frac{e^{-\lambda}}{2} + E(X) \quad \text{(ce qui assure la convergence de la série).} \end{aligned}$$

$$\boxed{E(Y) = \frac{e^{-\lambda}}{2} + \lambda}$$

Sous réserve de convergence de la série ($Y^2 \geq 0$),

$$\begin{aligned} E(Y^2) &= \tfrac{1}{4}P(Y = \tfrac{1}{2}) + \sum_{n=1}^{+\infty} n^2P(Y = n) \\ &= \frac{e^{-\lambda}}{4} + E(X^2) \quad \text{(ce qui assure la convergence de la série)} \\ &= \frac{e^{-\lambda}}{4} + V(X) + (E(X))^2 \quad \text{(d'après le théorème de Köenig-Huygens)} \\ &= \frac{e^{-\lambda}}{4} + \lambda + \lambda^2 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} V(Y^2) &= E(Y^2) - (E(Y))^2 \quad \text{(d'après le théorème de Köenig-Huygens)} \\ &= \frac{e^{-\lambda}}{4} + \lambda + \lambda^2 - (\frac{e^{-\lambda}}{2} + \lambda)^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{V(Y) = \frac{e^{-\lambda}}{4} + \lambda - \frac{e^{-2\lambda}}{4} - \lambda e^{-\lambda} = (1 - e^{-\lambda})(\lambda + \frac{e^{-\lambda}}{4})}$$

Partie 2 : étude de plusieurs cas où X est à densité

5–a)

Si $X(\omega) = 0$, alors $Y(\omega) = \dfrac{X(\omega)^2 + 1}{2}$.

Si $X(\omega) \in]0,1[$, alors $Y(\omega) = \dfrac{X(\omega)^2 + 1}{2}$.

$$\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{U}_{[0,1[} \Longrightarrow Y = \frac{X^2 + 1}{2}}$$

5–b)

On a : $0 \leq X < 1$, donc $0 \leq X^2 < 1$, donc $\frac{1}{2} \leq \dfrac{X^2 + 1}{2} < 1$.

$$\boxed{Y(\Omega) = [\tfrac{1}{2}, 1[}$$

5–c)

$$\begin{aligned}\forall x\in[\tfrac{1}{2},1[,\ F_Y(x) &= P(\frac{X^2+1}{2}\le x)\\ &= P(X^2\le 2x-1) \quad \text{Or } x\in[\tfrac{1}{2},1]\Longrightarrow 2x-1\ge 0,\ \text{donc}\\ &= P(|X|\le\sqrt{2x-1}) \quad \text{car } t\mapsto\sqrt{t} \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+\\ &= P(X\le\sqrt{2x-1}) \quad \text{car } X\ge 0\end{aligned}$$

Or $\frac{1}{2}\le x<1\iff 1\le 2x<2\iff 0\le 2x-1<1$, donc $P(X\le\sqrt{2x-1})=\sqrt{2x-1}$.

$$\boxed{\forall x\in[\tfrac{1}{2},1[,\ F_Y(x)=\sqrt{2x-1}}$$

5–d)

Puisque $Y(\Omega)=[\frac{1}{2},1[$, on déduit : $F_Y(x)=\begin{cases}0 & \text{si}\quad x<\frac{1}{2}\\ \sqrt{2x-1} & \text{si}\quad \frac{1}{2}\le x<1\\ 1 & \text{si}\quad x\ge 1\end{cases}$

Sur $]-\infty,\frac{1}{2}[\cup]1,+\infty[$, F_Y est de classe C^1.

Sur $]\frac{1}{2},1[$, $x\mapsto 2x-1$ est de classe C^1 et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. La fonction racine carrée est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, donc par composition, $x\mapsto\sqrt{2x-1}$ est de classe C^1 sur $]\frac{1}{2},1[$.

$$F_Y \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}-\{\tfrac{1}{2},1\}$$

$F_Y(\frac{1}{2})=0$.

$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-}F_Y(x)=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-}0=0=F_Y(\frac{1}{2})$.

$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+}F_Y(x)=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+}\sqrt{2x-1}=0=F_Y(\frac{1}{2})$.

$$F_Y \text{ est continue au point } \frac{1}{2}$$

$F_Y(1)=1$.

$\lim\limits_{x\to 1^-}F_Y(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\sqrt{2x-1}=1=F_Y(1)$.

$\lim\limits_{x\to 1^+}F_Y(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}1=1=F_Y(1)$.

$$F_Y \text{ est continue au point } 1$$

F_Y est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}-\{\frac{1}{2},1\}$.

Puisque Y est une variable aléatoire, F_Y est une fonction de répartition (croissante, $\lim\limits_{x\to-\infty}F_Y(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}F_Y(x)=1$). Donc

$$\boxed{Y \text{ est une variable à densité}}$$

5–e)

Prenons pour densité de Y, la fonction f_Y donnée par :

$$f_Y(x)=\begin{cases}0 & \text{si}\quad x\in]-\infty,\frac{1}{2}]\cup]1,+\infty[\\ \dfrac{1}{\sqrt{2x-1}} & \text{si}\quad x\in]\frac{1}{2},1]\end{cases}$$

Sous réserve de convergence absolue, $E(Y)=\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{x}{\sqrt{2x-1}}dx$.

Effectuons le changement de variable $u = \sqrt{2x-1}$ (changement C^1 bijectif sur $]\frac{1}{2}, 1]$, donc licite).

$x = \dfrac{u^2+1}{2}$, $dx = udu$.

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{x}{\sqrt{2x-1}} dx &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{u^2+1}{u} udu \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 (u^2+1) du \quad \text{(ce qui assure la convergence absolue)} \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{u^3}{3} + u \right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+1\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{E(Y) \text{ existe et } E(Y) = \frac{2}{3}}$$

5–f)

Hors programme.

6–a)

Puisque $X-1$ suit une loi exponentielle, $(X-1)(\Omega) = \mathbb{R}_+$. Par conséquent $X - 1 \geq 0$, donc $X \geq 1$.

$$\boxed{\forall \omega \in \Omega,\ X(\omega) \geq 1 \Longrightarrow Y(\omega) = X(\omega) : Y = X}$$

6–b)

$Y = X - 1 + 1$, donc $E(Y) = E(X-1) + 1$. $\boxed{E(Y) = \frac{1}{\lambda} + 1}$

De même, $V(Y) = V(X-1)$, donc $\boxed{V(Y) = \frac{1}{\lambda^2}}$

6–c)

$0 \leq U < 1 \Longleftrightarrow 0 < 1 - U \leq 1 \Longleftrightarrow \ln(1-U) \leq 0 \Longleftrightarrow -\frac{1}{\lambda}\ln(1-U) \geq 0.$

$$W(\Omega) = \mathbb{R}_+$$

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}_+,\ F_W(x) &= P\left(-\frac{1}{\lambda}\ln(1-U) \leq x\right) \\
&= P(\ln(1-U) \geq -\lambda x) \quad (\text{car } -\lambda < 0) \\
&= P(1 - U \geq e^{-\lambda x}) \quad (\text{l'exponentielle strictement croissante sur } \mathbb{R}) \\
&= P(U \leq 1 - e^{-\lambda x})
\end{aligned}$$

Or $(x \geq 0,\ -\lambda < 0) \Longrightarrow -\lambda x \leq 0$, donc $0 < e^{-\lambda x} \leq 1$. La variable U suit la loi uniforme sur $]0, 1]$, donc $P(U \leq 1 - e^{-\lambda x}) = 1 - e^{-\lambda x}$.

$$F_W(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{La variable } W \text{ suit la loi exponentielle de paramètre } \lambda}$$

Il s'agit de trouver une variable aléatoire U, qui suit la loi uniforme sur $[0, 1[$ telle que $X - 1 = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-U)$

Analyse : si U existe, alors $1 - U = e^{-\lambda(X-1)}$ puis $U = 1 - e^{-\lambda(X-1)}$.

Synthèse. On sait que $X - 1$ suit la loi exponentielle de paramètre λ. Considérons la variable aléatoire $U = 1 - e^{-\lambda(X-1)}$.

Il est clair que, d'après la calcul précédent, $X - 1 = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-U)$.

Vérifions que U suit la loi uniforme sur $[0,1[$.
$(X-1 \leq 0,\ \lambda > 0) \Longrightarrow -\lambda(X-1) \leq 0$, donc $0 \leq 1-e^{-\lambda(X-1)} < 1$. Par suite $U(\Omega) = [0,1[$.
$\forall x \in [0,1[$,

$$\begin{aligned} P(U \leq x) &= P(1-e^{-\lambda(X-1)} \leq x) \\ &= P(e^{-\lambda(X-1)} \geq 1-x) \\ &= P(-\lambda(X-1) \geq \ln(1-x)) \quad \text{(stricte croissance du logarithme)} \\ &= P(X-1 \leq -\tfrac{1}{\lambda}\ln(1-x)) \quad (\text{car } -\tfrac{1}{\lambda} < 0) \end{aligned}$$

Or $X-1 \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, donc
$\forall y \in \mathbb{R}_+,\ P(X-1 \leq y) = \displaystyle\int_0^y \lambda e^{-\lambda t}dt = \Big[-e^{-\lambda t}\Big]_0^y = 1-e^{-\lambda y}$. Par suite

$$\begin{aligned} P(X-1 \leq -\tfrac{1}{\lambda}\ln(1-x)) &= 1-e^{-\lambda(-\frac{1}{\lambda}\ln(1-x))} \\ &= 1-e^{\ln(1-x)} = 1-(1-x) = x \end{aligned}$$

Donc U suit la loi uniforme sur $[0,1[$.

7–a)

$X(\omega) \leq 0 \Longrightarrow Y(\omega) = \frac{1}{2}$;

$0 < X(\omega) \leq 1 \Longrightarrow Y(\omega) = \dfrac{X^2(\omega)+1}{2}$; il est clair que l'on a $\frac{1}{2} < \dfrac{X^2(\omega)+1}{2} \leq 1$.

$X(\omega) \geq 1 \Longrightarrow Y(\omega) = X(\omega) \geq 1$.

$$\boxed{\text{En conséquence } Y(\Omega) = [\tfrac{1}{2}, +\infty[}$$

7–b)

$P(Y = \frac{1}{2}) = P(X \leq 0) = \Phi(0)$. Donc $\boxed{P(Y = \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}}$

7–c)

Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après $Y(\Omega)$, on peut dire que :

- $x < \frac{1}{2} \Longrightarrow F_Y(x) = 0$
- Soit $x \in [\frac{1}{2}, 1]$. D'après la formule des probabilités totales,

$P(Y \leq x) = P((X \leq 0) \cap (Y \leq x)) + P((0 < X \leq 1) \cap (Y \leq x)) + P((X > 1) \cap (Y \leq x))$. **(7c)**

$*\quad P\Big((X \leq 0) \cap (Y \leq x)\Big) = P(X \leq 0)P_{(X\leq 0)}(Y \leq x)$.

Si l'événement $(X \leq 0)$ est réalisé, $Y = \frac{1}{2}$, donc $(Y \leq x)$ puisque $\frac{1}{2} \leq x$ par hypothèse.
Par suite $P_{(X\leq 0)}(Y \leq x) = 1$ et finalement $P((X \leq 0) \cap (Y \leq x)) = P(X \leq 0) = \Phi(x)$.

$$\begin{aligned} * \quad (0 < X \leq 1) \cap (Y \leq x) &= (0 < X \leq 1) \cap (\tfrac{X^2+1}{2} \leq x) \\ &= (0 < X \leq 1) \cap (X^2 \leq 2x-1) \\ &= (0 < X \leq 1) \cap (|X| \leq \sqrt{2x-1}) \\ &= (0 < X \leq 1) \cap (0 < X \leq \sqrt{2x-1}) \quad \text{car } X > 0 \end{aligned}$$

Or $(0 < X \leq \sqrt{2x-1}) \subset (0 < X \leq 1)$ puisque $2x-1 \leq 1$, donc
$(0 < X \leq 1) \cap (0 < X \leq \sqrt{2x-1}) = (0 < X \leq \sqrt{2x-1})$.
Par suite $P((0 < X \leq 1) \cap (Y \leq x)) = P(0 < X \leq \sqrt{2x-1}) = \Phi(\sqrt{2x-1}) - \Phi(0)$.

$*\quad (X > 1) \cap (Y \leq x) = (X > 1) \cap (X \leq x) = \emptyset$ car $x \leq 1$. Donc $P((X > 1) \cap (Y \leq x)) = 0$.

L'égalité (7c) devient :

$$\forall x \in [\tfrac{1}{2}, 1],\ F_Y(x) = \Phi(0) + \Phi(\sqrt{2x-1}) - \Phi(0) = \Phi(\sqrt{2x-1}).$$

- Soit $x > 1$.

$(X \leq 0) \cap (Y \leq x) = (X \leq 0)$ car dans ces conditions $Y = \frac{1}{2} \leq x$.

$(0 < X \leq 1) \Longrightarrow (\dfrac{X^2+1}{2} \leq 1 < x)$, donc $(0 < X \leq 1) \cap (Y \leq x) = (0 < X \leq 1)$.

$(X > 1) \cap (Y \leq x) = (X > 1) \cap (X \leq x) = (1 < X \leq x)$.

L'égalité (7c) devient :

$\forall x > 1,\ F_Y(x) = P(X \leq 0) + P(0 < X \leq 1) + P(1 < X \leq x) = P(X \leq x) = \Phi(x)$.

Finalement,

$$\boxed{F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < \frac{1}{2} \\ \Phi(\sqrt{2x-1}) & \text{si} \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ \Phi(x) & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}}$$

7–d)

$F_Y(\frac{1}{2}) = \Phi(0) = \frac{1}{2}$. Mais $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^-} F_Y(x) = 0 \neq F_Y(\frac{1}{2})$.

F_Y n'est pas continue sur $\mathbb{R}$: Y n'est pas une variable à densité

$F_Y(\Omega) = [\frac{1}{2}, +\infty[$ et cet ensemble n'est pas un ensemble discret.

Y n'est pas une variable discrète

7–e)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons la variable $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} U_k$.

$E(S_n) = nE(U_1) = \frac{n}{2}$; $V(S_n) = nV(U_1)$ car les variables U_k sont indépendantes, donc $V(S_n) = \frac{n}{12}$

La variable $T_n = \dfrac{S_n - E(S_n)}{\sigma(S_n)}$ est la variable centrée, réduite associée à S_n.

D'après le théorème de la limite centrée, la suite (T_n) converge en loi vers une variable qui suit la loi normale, centrée, réduite. Par conséquent, la loi de T_n peut être approchée par la loi normale centrée, réduite pour n " assez grand ".

Pour $n = 48$, $T_{48} = \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{48} U_k - 24}{\sqrt{\frac{48}{12}}} = \frac{1}{2}(\sum\limits_{k=1}^{48} U_k - 24)$.

$\boxed{\text{La loi de } \frac{1}{2}(\sum\limits_{k=1}^{48} U_k - 24) \text{ peut être approchée par la loi normale, centrée, réduite}}$

La variable $\frac{1}{2}(\sum\limits_{k=1}^{48} U_k - 24)$ va simuler X.