

Une équation fonctionnelle

On cherche les applications $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ayant en 0 une dérivée $f'(0) = a > 0$, et telles que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \text{ (avec } xy + 1 \neq 0) : f(x)f(y) = f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right) \quad (1)$$

Dans les questions 1 à 10, on suppose l'existence d'une solution f à ce problème.

1. Montrer que $f(-1) = f(1) = 0$ et $f(0) = 1$. [I] [S]
2. Montrer que f ne s'annule qu'aux points -1 et 1 . [I] [S]
3. Montrer que : $\forall t \in]-1, 1[$ $f(t) > 0$. [I] [S]
4. Soit x_1 un réel distinct de $-1, 0$, et 1 . Soit $M(x_1) = \left|x_1 - \frac{1}{x_1}\right| > 0$.
 - (a) Montrer que si $|h| < M(x_1)$, alors l'équation $\frac{x_1 + y}{1 + x_1 y} = x_1 + h$ (où y est l'inconnue) admet une solution y_h . [I] [S]
 - (b) En déduire que f est dérivable en x_1 et que $f'(x_1) = \frac{a f(x_1)}{1 - x_1^2}$. [I] [S]
5. Montrer que, $\forall x \in]-1, 1[$, $f(x) = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{a/2}$. [I] [S]
6. Montrer que f a un signe constant sur $]1, +\infty[$, et un signe constant sur $] -\infty, -1[$. [I] [S]
7. Montrer que f garde un signe constant ε sur $] -\infty, -1[\cup]1, +\infty[$. [I] [S]
8. Montrer que pour tous réels x et y tels que $xy \neq -1$:
 - (a) $(|x| < 1 \text{ et } |y| < 1) \text{ ou } (|x| > 1 \text{ et } |y| > 1) \Rightarrow \left|\frac{x+y}{1+xy}\right| < 1$.
 - (b) $(|x| < 1 \text{ et } |y| > 1) \text{ ou } (|x| > 1 \text{ et } |y| < 1) \Rightarrow \left|\frac{x+y}{1+xy}\right| > 1$.

[I] [S]
9. En déduire que l'application g définie sur \mathbb{R} par : $\begin{cases} \forall x \in [-1, 1], g(x) = f(x) \\ \forall x \notin [-1, 1], g(x) = -f(x) \end{cases}$ est encore une solution du problème (ce qui prouve que ε peut être choisi arbitrairement). [I] [S]
10. On suppose que " $\varepsilon = +$ ". Montrer que : $\forall x \neq 1, f(x) = \left|\frac{1+x}{1-x}\right|^{a/2}$. [I] [S]
11. Réciproquement, montrer qu'une telle application (en posant en outre $f(1) = 0$), est bien une solution du problème. [I] [S]
12. Donner toutes les solutions du problème. [I] [S]
13. En se limitant à " $\varepsilon = +$ ", tracer les courbes représentatives correspondant à chacun des cas possibles (trois courbes). [I] [S]

Indications ou résultats

1. Poser $y = 0$, $y = 1$, $y = -1$. [Q]
2. Raisonner par l'absurde. [Q]
3. Poser $y = x$. [Q]
4. (a) On trouve $y_h = \frac{h}{1 - x_1^2 - x_1 h}$ [Q]
(b) Écrire $\frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} = f(x_1) \frac{f(y_h) - 1}{y_h} \frac{y_h}{h}$ et faire tendre h vers 0. [Q]
5. Intégrer $\frac{f'(x)}{f(x)}$ et utiliser $f(0) = 1$. [Q]
6. Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires, et la question 2. [Q]
7. Dans l'égalité (1), choisir $y = -x$, avec $x > 1$. [Q]
8. Factoriser $1 - \frac{x + y}{1 + xy}$ et $1 + \frac{x + y}{1 + xy}$. [Q]
9. Vérifier que pour tous x, y tels que $xy + 1 \neq 0$ on a $g(x)g(y) = g\left(\frac{x + y}{1 + xy}\right)$, en discutant sur la position de $|x|$ et de $|y|$ par rapport à 1. [Q]
10. On intègre $\frac{f'(x)}{f(x)}$ et on fait tendre x vers $\pm\infty$. [Q]
11. Vérifier $f\left(\frac{x + y}{1 + xy}\right) = f(x)f(y)$, suivant les valeurs de x et y . [Q]
12. Les questions 9 et 11 montrent qu'il y a deux solutions. [Q]
13. L'étude de la dérivabilité de f en -1 conduit à placer a par rapport à 2. [Q]