Une équation fonctionnelle

On cherche les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ayant en 0 une dérivée $f'(0) = a > 0$, et telles que :

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R} \text{ (avec } xy + 1 \neq 0) : \ f(x)f(y) = f\Big(\frac{x+y}{1+xy}\Big) \quad (1)$$

Dans les questions 1 à 10, on suppose l'existence d'une solution f à ce problème.

1. Montrer que $f(-1) = f(1) = 0$ et $f(0) = 1$. [I] [S]
2. Montrer que f ne s'annule qu'aux points -1 et 1. [I] [S]
3. Montrer que : $\forall\, t \in]-1, 1[\ f(t) > 0$. [I] [S]
4. Soit x_1 un réel distinct de -1, 0, et 1. Soit $M(x_1) = \Big|x_1 - \dfrac{1}{x_1}\Big| > 0$.
   (a) Montrer que si $|h| < M(x_1)$, alors l'équation $\dfrac{x_1 + y}{1 + x_1 y} = x_1 + h$ (où y est l'inconnue) admet une solution y_h. [I] [S]
   (b) En déduire que f est dérivable en x_1 et que $f'(x_1) = \dfrac{a\, f(x_1)}{1 - x_1^2}$. [I] [S]
5. Montrer que, $\forall\, x \in]-1, 1[$, $f(x) = \Big(\dfrac{1+x}{1-x}\Big)^{a/2}$. [I] [S]
6. Montrer que f a un signe constant sur $]1, +\infty[$, et un signe constant sur $]-\infty, -1[$. [I] [S]
7. Montrer que f garde un signe constant ε sur $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$. [I] [S]
8. Montrer que pour tous réels x et y tels que $xy \neq -1$:
   (a) $(|x| < 1 \text{ et } |y| < 1)$ ou $(|x| > 1 \text{ et } |y| > 1) \Rightarrow \Big|\dfrac{x+y}{1+xy}\Big| < 1$.
   (b) $(|x| < 1 \text{ et } |y| > 1)$ ou $(|x| > 1 \text{ et } |y| < 1) \Rightarrow \Big|\dfrac{x+y}{1+xy}\Big| > 1$.
   [I] [S]
9. En déduire que l'application g définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} \forall\, x \in [-1, 1],\ g(x) = f(x) \\ \forall\, x \notin [-1, 1],\ g(x) = -f(x) \end{cases}$ est encore une solution du problème (ce qui prouve que ε peut être choisi arbitrairement). [I] [S]
10. On suppose que "$\varepsilon = +$". Montrer que : $\forall\, x \neq 1,\ f(x) = \Big|\dfrac{1+x}{1-x}\Big|^{a/2}$. [I] [S]
11. Réciproquement, montrer qu'une telle application (en posant en outre $f(1) = 0$), est bien une solution du problème. [I] [S]
12. Donner toutes les solutions du problème. [I] [S]
13. En se limitant à "$\varepsilon = +$", tracer les courbes représentatives correspondant à chacun des cas possibles (trois courbes). [I] [S]

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 7 pages.

Indications ou résultats

1. Poser pose $y = 0$, $y = 1$, $y = -1$. [Q]
2. Raisonner par l'absurde. [Q]
3. Poser $y = x$. [Q]
4. (a) On trouve $y_h = \dfrac{h}{1 - x_1^2 - x_1 h}$ [Q]

   (b) Écrire $\dfrac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} = f(x_1)\,\dfrac{f(y_h) - 1}{y_h}\,\dfrac{y_h}{h}$ et faire tendre h vers 0. [Q]
5. Intégrer $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ et utiliser $f(0) = 1$. [Q]
6. Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires, et la question 2. [Q]
7. Dans l'égalité (1), choisir $y = -x$, avec $x > 1$. [Q]
8. Factoriser $1 - \dfrac{x+y}{1+xy}$ et $1 + \dfrac{x+y}{1+xy}$. [Q]
9. Vérifier que pour tous x, y tels que $xy + 1 \neq 0$ on a $g(x)g(y) = g\left(\dfrac{x+y}{1+xy}\right)$, en discutant sur la position de $|x|$ et de $|y|$ par rapport à 1. [Q]
10. On intègre $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ et on fait tendre x vers $\pm\infty$. [Q]
11. Vérifier $f\left(\dfrac{x+y}{1+xy}\right) = f(x)f(y)$, suivant les valeurs de x et y. [Q]
12. Les questions 9 et 11 montrent qu'il y a deux solutions. [Q]
13. L'étude de la dérivabilité de f en -1 conduit à placer a par rapport à 2. [Q]

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 7 pages.