Approximations de π à l'aide de développements limités

Au dix-septième siècle, des mathématiciens comme Huyghens et Snellius entreprirent de calculer des valeurs décimales approchées de π par des méthodes trigonométriques élémentaires. Il s'agissait d'améliorer la double inégalité classique $\sin x < x < \tan x$ valable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ en introduisant des fonctions :

– Qui s'expriment simplement à l'aide des fonctions trigonométriques usuelles.

– Peu différentes de x au voisinage de 0.

Les fonctions f_1 et f_4 de l'énoncé sont celles de Snellius ; f_2 et f_3 sont celles de Huyghens.

1. Soient a, b des réels positifs ou nuls. On pose $m(a,b) = \frac{2a+b}{3}$ et $g(a,b) = \sqrt[3]{a^2 b}$.
   Comparer $m(a,b)$ et $g(a,b)$. [S]

2. Dans toute la suite, on définit les fonctions suivantes sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$:

$$f_1(x) = \frac{3\sin x}{2+\cos x}, \qquad f_2(x) = \frac{1}{3}\left(8\sin\frac{x}{2} - \sin x\right)$$
$$f_3(x) = \sqrt[3]{\sin^2 x \tan x}, \qquad f_4(x) = \frac{1}{3}(2\sin x + \tan x)$$

   Calculer les développements limités en 0 de ces fonctions, à l'ordre 5.

   En déduire l'existence de $\eta > 0$ tel que : $\forall x \in]0, \eta[,\ f_1(x) < f_2(x) < x < f_3(x) < f_4(x)$. [S]

3. On suppose ici que x appartient à $I =]0, \frac{\pi}{2}[$. Quel est le signe de $f_4(x) - f_3(x)$? [S]

4. On pose $u(x) = 3(2+\cos x)(f_2(x) - f_1(x))$. Linéariser $u(x)$.
   Montrer que $u'(x) = P(\cos\frac{x}{2})$, où P est un polynôme de degré 4. Factoriser P.
   En déduire, pour x dans I, le signe de $u'(x)$ puis celui de $f_2(x) - f_1(x)$. [S]

5. On pose $v(x) = x - f_2(x)$. Montrer que $v'(x) = Q(\cos\frac{x}{2})$, où Q est un polynôme.
   En déduire, pour x dans I, le signe de $v'(x)$ puis celui de $v(x)$. [S]

6. On pose $w(x) = f_3(x) - x$. Calculer et factoriser $w'(x)$.
   En déduire, pour x dans I, le signe de $w(x)$.
   Quelle suite d'inégalités les questions 3 à 6 permettent-elles d'obtenir sur I ? [S]

7. Seules les valeurs des fonctions trigonométriques de $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{6}$ sont supposées connues.
   Calculer des expressions simples de $\cos\frac{\pi}{12}$, $\sin\frac{\pi}{12}$ et $\tan\frac{\pi}{12}$.
   Faire de même avec $\sin\frac{\pi}{24}$ à l'aide de radicaux superposés.
   Calculer les expressions par radicaux de $X = 12 f_2(\frac{\pi}{12})$ et de $Y = 12 f_3(\frac{\pi}{12})$.
   En déduire un encadrement de π. [S]

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.

Corrigé du problème

1. Pour comparer $m(a,b)$ et $g(a,b)$, on factorise $m^3(a,b)-g^3(a,b)$:

$$\begin{aligned} m^3(a,b)-g^3(a,b) &= \frac{1}{27}(8a^3+12a^2b+6ab^2+b^3-27a^2b) \\ &= \frac{1}{27}(8a^3-15a^2b+6ab^2+b^3) = \frac{1}{27}(a-b)^2(8a+b) \end{aligned}$$

Si $a\neq b$, alors $8a+b>0$. On en déduit $m^3(a,b)>g^3(a,b)$ donc $m(a,b)>g(a,b)$.

Bien sûr, si $a=b$ alors $m(a,b)=g(a,b)$. [Q]

2. Remarque : les fonctions f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 sont impaires. Les développements limités seront donc de la forme $f_k(x)=ax+bx^3+cx^5+\mathrm{o}(x^5)$.

– Développement limité de f_1 à l'origine :

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 3\,\frac{x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+\mathrm{o}(x^5)}{3-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+\mathrm{o}(x^5)} \\ &= \Big(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+\mathrm{o}(x^5)\Big)\Big(1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{72}+\mathrm{o}(x^5)\Big)^{-1} \\ &= x\Big(1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+\mathrm{o}(x^4)\Big)\Big(1+\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{72}+\mathrm{o}(x^4)\Big) \\ &= x\Big(1+x^4\Big(\frac{1}{72}-\frac{1}{36}+\frac{1}{120}+\mathrm{o}(x^4)\Big)\Big) = x\Big(1-\frac{x^4}{180}+\mathrm{o}(x^4)\Big) \end{aligned}$$

On a donc obtenu : $f_1(x)=x-\dfrac{x^5}{180}+\mathrm{o}(x^5)$.

– Développement limité de f_2 à l'origine :

$$\begin{aligned} f_2(x) &= \frac{1}{3}\left(8\Big(\frac{x}{2}-\frac{x^3}{3!8}+\frac{x^5}{5!32}+\mathrm{o}(x^5)\Big)-\Big(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\mathrm{o}(x^5)\Big)\right) \\ &= \frac{1}{3}\Big(3x-\frac{3}{4}\,\frac{x^5}{5!}+\mathrm{o}(x^5)\Big) = x-\frac{x^5}{480}+\mathrm{o}(x^5) \end{aligned}$$

– Développement limité de f_3 à l'origine :

$$\begin{aligned} f_3(x) &= \sin x(\cos x)^{-1/3} = x\Big(1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+\mathrm{o}(x^4)\Big)\Big(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\mathrm{o}(x^4)\Big)^{-1/3} \\ &= x\Big(1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+\mathrm{o}(x^4)\Big)\Big(1+\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{72}+\frac{x^4}{18}+\mathrm{o}(x^4)\Big) \\ &= x\Big(1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+\mathrm{o}(x^4)\Big)\Big(1+\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{24}+\mathrm{o}(x^4)\Big) \\ &= x\left(1+x^4\Big(\frac{1}{24}-\frac{1}{36}+\frac{1}{120}\Big)+\mathrm{o}(x^4)\right) = x+\frac{x^5}{45}+\mathrm{o}(x^5) \end{aligned}$$

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.