Pavages et clans

Rappels

Soit E un ensemble, et soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille quelconque de parties de E.

On rappelle que $\bigcup\limits_{i\in I} A_i = \{x \in E, \exists\, i \in I, x \in A_i\}$ et que $\bigcap\limits_{i\in I} A_i = \{x \in E, \forall\, i \in I, x \in A_i\}$.

Soit $(A_n)_{n\geq 0}$ une suite de parties de E.

– On dit que cette suite est *croissante* si : $\forall\, n \in \mathbb{N}, A_n \subset A_{n+1}$.

– On dit qu'elle est *décroissante* si : $\forall\, n \in \mathbb{N}, A_n \supset A_{n+1}$.

Première Partie

Soit E un ensemble quelconque. Soit $\mathcal{P}$ une partie de $\mathcal{P}(E)$.

On dit que $\mathcal{P}$ est un *pavage* si : $\forall\,(A,B) \in \mathcal{P}^2, \begin{cases} A\cup B \in \mathcal{P} \\ A\cap B \in \mathcal{P} \end{cases}$

On dit que le pavage $\mathcal{P}$ est *achevé* si :

– Pour toute suite $(A_n)_{n\geq 0}$ croissante d'éléments de $\mathcal{P}$, $\bigcup\limits_{n\geq 0} A_n$ est encore un élément de $\mathcal{P}$.

– Pour toute suite $(A_n)_{n\geq 0}$ décroissante d'éléments de $\mathcal{P}$, $\bigcap\limits_{n\geq 0} A_n$ est encore un élément de $\mathcal{P}$.

1. Vérifier que $\emptyset$ et $\mathcal{P}(E)$ sont des pavages achevés de E. [S]
2. Donner tous les pavages de E quand $E = \emptyset$, ou $E = \{a\}$, ou $E = \{a, b\}$ [S].
3. Dans cette question, on suppose que E est un ensemble fini.
   Soit $(A_n)_{n\geq 0}$ une suite croissante (ou décroissante) de parties de E.
   (a) Montrer que la suite $(A_n)_{n\geq 0}$ est *stationnaire*.
   Autrement dit, il existe un entier p tel que, pour tout $n \geq p$, $A_n = A_p$. [S]
   (b) En déduire que tout pavage de E est achevé. [S]
4. Soient $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux pavages de E.
   (a) L'union $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ est-elle un pavage de E ? [S]
   (b) L'intersection $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ est-elle un pavage de E ? [S]
5. Soit $\mathcal{P}$ un pavage de E.
   (a) Montrer que la famille des pavages achevés de E qui contiennent $\mathcal{P}$ est non vide.
   On note $\widehat{\mathcal{P}}$ l'intersection de tous les pavages de cette famille. [S]
   (b) Montrer que $\widehat{\mathcal{P}}$ est lui-même un pavage achevé contenant $\mathcal{P}$. [S]

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 9 pages.

(c) Réciproquement, montrer que si un pavage achevé contient $\mathcal{P}$, alors il contient $\widehat{\mathcal{P}}$.
$\widehat{\mathcal{P}}$ est donc, au sens de l'inclusion, le plus petit pavage achevé contenant $\mathcal{P}$.
On dit que $\widehat{\mathcal{P}}$ est le pavage achevé *engendré* par $\mathcal{P}$. [S]

(d) A quelle condition a-t-on $\mathcal{P} = \widehat{\mathcal{P}}$? [S]

6. Soit $\mathcal{P}$ un pavage de E. On note $\mathcal{P}_m = \{B \subset E, \forall\, A \in \mathcal{P}, B \cap A \in \mathcal{P}\}$.
   (a) Montrer que $\mathcal{P}_m$ est un pavage de E qui contient $\mathcal{P}$. [S]
   (b) Montrer que si $\mathcal{P}$ est achevé, alors $\mathcal{P}_m$ est achevé. [S]

Deuxième Partie

Rappel : on note $\overline{F}$ le complémentaire dans E d'une partie F quelconque de E.

On dit qu'un pavage $\mathcal{P}$ de E est un *clan* si : $\forall\,(A,B) \in \mathcal{P}^2, A \cap \overline{B} \in \mathcal{P}$.

1. Vérifier que $\emptyset$ et $\mathcal{P}(E)$ sont des clans de E. [S]
2. Donner tous les clans de E quand $E = \emptyset$, ou $E = \{a\}$, ou $E = \{a, b\}$ [S].
3. Montrer que si $\mathcal{P}$ est un clan de E alors $\mathcal{P}_m$ est un clan de E. [S]
4. On se donne un clan $\mathcal{P}$ de E. On veut montrer que $\widehat{\mathcal{P}}$ est un clan de E.
   (a) Soit A une partie de E. On note $\mathcal{E}_A = \{B \subset E, A \cap \overline{B} \in \widehat{\mathcal{P}}\}$.
   Montrer que est $\mathcal{E}_A$ est un pavage de E. [S]
   (b) Prouver que le pavage $\mathcal{E}_A$ est achevé. [S]
   (c) En déduire que si A appartient à $\mathcal{P}$, alors $\widehat{\mathcal{P}}$ est inclus dans $\mathcal{E}_A$. [S]
   (d) Soit B une partie de E. On note $\mathcal{F}_B = \{A \subset E, A \cap \overline{B} \in \widehat{\mathcal{P}}\}$.
   Montrer que est $\mathcal{F}_B$ est un pavage achevé de E. [S]
   (e) En déduire que si B appartient à $\widehat{\mathcal{P}}$, alors $\widehat{\mathcal{P}}$ est inclus dans $\mathcal{F}_B$. [S]
   (f) Conclure. [S]

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 9 pages.

Corrigé du problème

Première Partie

1. – Si $\mathcal{P}=\emptyset$, l'assertion $(A,B)\in\mathcal{P}^2 \Rightarrow \begin{cases} A\cup B\in\mathcal{P} \\ A\cap B\in\mathcal{P}\end{cases}$ est vraie, tout simplement parce que le prédicat $(A,B)\in\mathcal{P}^2$ est toujours faux (en effet l'ensemble $\mathcal{P}^2$ est vide.)

   Donc $\emptyset$ est un pavage de E.

   – Si $\mathcal{P}=\mathcal{P}(E)$, l'assertion $(A,B)\in\mathcal{P}^2 \Rightarrow \begin{cases} A\cup B\in\mathcal{P} \\ A\cap B\in\mathcal{P}\end{cases}$ est toujours vraie.

   $\mathcal{P}(E)$ est donc également un pavage de E.

   [Q]

2. – Si $E=\emptyset$. Dans ce cas $\mathcal{P}(E)=\{\emptyset\}$.

   Les pavages de E sont $\mathcal{P}=\emptyset$ et $\mathcal{P}=\mathcal{P}(E)$, c'est-à-dire les deux seules parties de $\mathcal{P}(E)$.

   – Si $E=\{a\}$. Dans ce cas $\mathcal{P}(E)=\{\emptyset,\{a\}\}$.

   Les pavages de E sont $\mathcal{P}=\emptyset$, $\mathcal{P}=\{\emptyset\}$, $\mathcal{P}=\{\{a\}\}$, et $\mathcal{P}=\mathcal{P}(E)$.

   Autrement dit, les quatres parties possibles de $\mathcal{P}(E)$ sont des pavages de E.

   – Si $E=\{a,b\}$:

   Dans ce cas $\mathcal{P}(E)=\{\emptyset,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$. Les pavages de E sont :

   $\mathcal{P}=\emptyset$ $\quad$ $\mathcal{P}=\{\emptyset\}$ $\quad$ $\mathcal{P}=\{\{a\}\}$ $\quad$ $\mathcal{P}=\{\{b\}\}$
   $\mathcal{P}=\{\{a,b\}\}$ $\quad$ $\mathcal{P}=\{\emptyset,\{a\}\}$ $\quad$ $\mathcal{P}=\{\emptyset,\{b\}\}$ $\quad$ $\mathcal{P}=\{\emptyset,\{a,b\}\}$
   $\mathcal{P}=\{\{a\},\{a,b\}\}$ $\quad$ $\mathcal{P}=\{\{b\},\{a,b\}\}$ $\quad$ $\mathcal{P}=\{\emptyset,\{a\},\{a,b\}\}$ $\quad$ $\mathcal{P}=\{\emptyset,\{b\},\{a,b\}\}$
   $\mathcal{P}=\mathcal{P}(E)$

   On remarque que les seules parties de $\mathcal{P}(E)$ qui ne sont pas des pavages de E sont :

   $$\{\{a\},\{b\}\}, \quad \{\{a\},\{b\},\{a,b\}\}, \quad \text{et} \quad \{\emptyset,\{a\},\{b\}\}$$

   [Q]

3. (a) Soit $(A_n)_{n\geq 0}$ une suite croissante de parties de E.

   Supposons par l'absurde que cette suite ne soit pas stationnaire.

   En particulier, il existe un entier n_1 tel que $A_0\subsetneq A_{n_1}$.

   On peut donc choisir un élément a_1 dans $A_{n_1}\setminus A_0$.

   De même, il existe un entier $n_2>n_1$ tel que $A_{n_1}\subsetneq A_{n_2}$.

   On peut alors choisir un élément a_2 dans $A_{n_2}\setminus A_{n_1}$.

   L'étape suivante donne $n_3>n_2$ tel que $A_{n_2}\subsetneq A_{n_3}$ et un élément a_3 dans $A_{n_3}\setminus A_{n_2}$.

   On peut alors itérer indéfiniment ce procédé et construire une suite strictement croissante $0<n_1<n_2<\cdots$ d'entiers naturels et une suite d'éléments a_k de E distincts deux à deux par construction.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 9 pages.