Calcul intégral appliqué à l'étude d'un maximum

On désigne par a un nombre réel strictement supérieur à 1.

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on note g_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$g_n(x) = x(x-1)\cdots(x-n)a^{-x}$$

L'objet du problème est d'étudier le maximum de la fonction g_n sur l'intervalle $[n, +\infty[$.

PREMIÈRE PARTIE

Dans cette partie, on examine le cas particulier où $n = 1$.

1. (a) Etudier les variations de la fonction $\dfrac{g_1'}{g_1}$.
   On notera u et v les valeurs de x où cette fonction s'annule, avec $u < v$. [S]
   (b) Dresser le tableau de variations de g_1. Etudier la branche infinie du graphe de g_1. [S]
2. Dans cette question, on prend $a = 2$.
   (a) Calculer les valeurs approchées à 10^{-5} près de $u, v, g_1(u), g_1(v)$. [S]
   (b) Construire le graphe de g_1 (unités : 2,5 cm sur Ox et 10 cm sur Oy). [S]

DEUXIÈME PARTIE

Dans cette partie, on considère une fonction réelle f de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle $[-1, 1]$.

On désigne par M le maximum de $|f''(x)|$ sur $[-1, 1]$. Soit β un élément de $\mathbb{R}^+$.

On se propose d'approcher l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ par la somme $\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{k-\beta}{n}\right)$.

On suppose que $n \geq \beta$. Pour tout nombre entier k tel que $1 \leq k \leq n$, on pose :

$$R_1(k,n) = f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{k-\beta}{n}\right) - \frac{\beta}{n}f'\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$R_2(k,n) = \int_{(k-1)/n}^{k/n} f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2n^2}f'\left(\frac{k}{n}\right)$$

1. (a) En utilisant Taylor-Lagrange montrer que $|R_1(k,n)| \leq \dfrac{A}{n^2}$, avec $A = \dfrac{\beta^2 M}{2}$. [S]
   (b) Montrer également que $|R_2(k,n)| \leq \dfrac{B}{n^3}$, avec $B = \dfrac{M}{6}$. [S]
2. (a) On pose $R_3(k,n) = \displaystyle\int_{(k-1)/n}^{k/n} f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{n}f\left(\frac{k-\beta}{n}\right) - \frac{\beta-1/2}{n}\left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{k-1}{n}\right)\right)$.
   Prouver l'inégalité $|R_3(k,n)| \leq \dfrac{C}{n^3}$ où $C = A + B + \dfrac{M}{2}\left|\beta - \dfrac{1}{2}\right|$. [S]

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 8 pages.

(b) On pose $\Delta_n = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\Big(\frac{k-\beta}{n}\Big) - \frac{\beta-1/2}{n}(f(1)-f(0))$.

Prouver que $|\Delta_n| \leq \dfrac{C}{n^2}$. [S]

TROISIÈME PARTIE

On revient à l'étude de la fonction g_n dans le cas général.

1. Pour tout réel $x > n$, calculer $h_n(x) = \dfrac{g_n'(x)}{g_n(x)}$.

   Montrer que sur $]n, +\infty[$, la dérivée de g_n s'annule en un point x_n unique.

   Etudier le signe de $g_n'(x)$ sur $]n, +\infty[$. On pose $M_n = g_n(x_n)$. [S]

2. Soit α un réel strictement supérieur à 1.

   On considère la fonction f_α définie par $f_\alpha(x) = \dfrac{1}{\alpha - x}$.

   (a) Déterminer en fonction de a la valeur de α pour laquelle on a :

   $$h_n(n\alpha) = \frac{1}{n\alpha} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f_\alpha\Big(\frac{k}{n}\Big) - \int_0^1 f_\alpha(t)\,\mathrm{d}t$$

   Dans toute la suite, on pose $\alpha = \dfrac{a}{a-1}$. [S]

   (b) Vérifier que $h_n(n\alpha+\beta) = \dfrac{1}{n\alpha+\beta} - \dfrac{\beta-1/2}{n}(f_\alpha(1) - f_\alpha(0)) - \Delta_n$,
   où Δ_n a été défini dans la question II-2 (avec ici $f = f_\alpha$.) [S]

   (c) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\,h_n(n\alpha+\beta) = \frac{\alpha-\beta-1/2}{\alpha(\alpha-1)}$. [S]

3. Montrer qu'à partir d'un certain rang, $n\alpha \leq x_n \leq (n+1)\alpha$.

   A cet effet, on étudiera les signes de $h_n(n\alpha)$ et de $h_n((n+1)\alpha)$. [S]

4. (a) On se propose de déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} y_n$, avec $y_n = \frac{1}{n}\ln\prod_{k=0}^{n}\frac{x_n - k}{n}$.

   Pour celà, on utilisera l'encadrement précédent de x_n ; on utilisera le résultat de la question II-2-b avec $f(x) = \ln(\alpha - x)$, avec $\beta = 0$ puis $\beta = \alpha$.

   On en déduira que la limite cherchée est : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} y_n = \int_0^1 \ln(\alpha - x)\,\mathrm{d}x$. [S]

   (b) Calculer cette intégrale. [S]

   (c) Montrer finalement que la suite de terme général $\dfrac{1}{n}\sqrt[n]{M_n}$ converge vers $\dfrac{1}{\mathrm{e}(a-1)}$. [S]

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 8 pages.

Corrigé du problème

PREMIÈRE PARTIE

1. (a) Pour tout x de $\mathbb{R}^+$, $g_1(x) = x(x-1)a^{-x}$.

L'application g_1 est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$ et elle s'annule en 0 et 1.

Sur $\mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\}$: $\dfrac{g_1'(x)}{g_1(x)} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-1} - \ln a = \dfrac{-x^2 \ln a + (2 + \ln a)x - 1}{x(x-1)}$

L'application $\dfrac{g_1'}{g_1}$ s'annule en même temps que $P(x) = x^2 \ln a - (2 + \ln a)x + 1$.

Le discriminant est $\Delta = 4 + \ln^2 a > 0$. Les deux zéros réels et distincts de P sont :

$$u = \frac{2 + \ln a - \sqrt{4 + \ln^2 a}}{2 \ln a} \qquad \text{et} \qquad v = \frac{2 + \ln a + \sqrt{4 + \ln^2 a}}{2 \ln a}$$

On remarque que $u + v = \dfrac{2 + \ln a}{\ln a} > 0$ et $uv = \dfrac{1}{\ln a} > 0$, ce qui prouve $0 < u < v$.

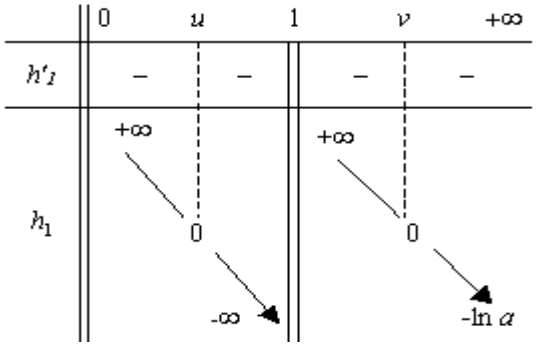
D'autre part, $P(1) = -1 < 0$ ce qui implique $0 < u < 1 < v$.

Pour tout x de $\mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\}$, $\left(\dfrac{g_1'(x)}{g_1(x)}\right)' = \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-1}\right)' = -\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{(x-1)^2} < 0$.

Voici le tableau de variations de l'application $h_1 = \dfrac{g_1'}{g_1}$:

On trouve facilement

- $\lim\limits_{0^+} \dfrac{g_1'}{g_1} = +\infty$,
- $\lim\limits_{1^-} \dfrac{g_1'}{g_1} = -\infty$,
- $\lim\limits_{1^+} \dfrac{g_1'}{g_1} = +\infty$,
- $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{g_1'}{g_1} = -\ln a$.



[Q]

(b) Comme $g_1 < 0$ sur $]0, 1[$ et $g_1 > 0$ sur $]1, +\infty[$, la question a) donne le signe de g_1' :

- L'application g_1' s'annule en u et v.
- Pour tout x de $]0, u[$, on a $g_1(x) < 0$ et $\dfrac{g_1'(x)}{g_1(x)} > 0$ donc $g_1'(x) < 0$.
- Pour tout x de $]u, 1[$, on a $g_1(x) < 0$ et $\dfrac{g_1'(x)}{g_1(x)} < 0$ donc $g_1'(x) > 0$.
- Pour tout x de $]1, v[$, on a $g_1(x) > 0$ et $\dfrac{g_1'(x)}{g_1(x)} > 0$ donc $g_1'(x) > 0$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 8 pages.