Deux équations fonctionnelles

Première partie

On appelle $\mathcal{F}$ l'ensemble des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$(1) \quad \forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x+y) + f(x-y) = 2(f(x) + f(y))$$

Soit f un élément de $\mathcal{F}$.

1. Montrer que $f(0) = 0$, puis que f est paire. [S]
2. Soit a un réel fixé. Montrer successivement :
   (a) $\forall n \in \mathbb{N},\ f(na) = n^2 f(a)$ [S]
   (b) $\forall n \in \mathbb{Z},\ f(na) = n^2 f(a)$ [S]
   (c) $\forall q \in \mathbb{N}^*,\ f(\frac{a}{q}) = \frac{1}{q^2} f(a)$ [S]
   (d) $\forall r \in \mathbb{Q},\ f(ra) = r^2 f(a)$ [S]
   (e) $\forall x \in \mathbb{R},\ f(xa) = x^2 f(a)$ [S]
3. En déduire : $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \lambda x^2$. [S]
4. Déterminer $\mathcal{F}$. [S]

Deuxième partie

On appelle $\mathcal{G}$ l'ensemble des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$(2) \quad \forall x, y \in \mathbb{R},\ g(x+y)g(x-y) = (g(x)g(y))^2$$

Soit g un élément de $\mathcal{G}$.

1. Quelles sont les valeurs possibles de $g(0)$?
   Existe-t-il des éléments de $\mathcal{G}$ réalisant ces différentes possibilités ? [S]
2. Montrer que $g(0) = 0 \Leftrightarrow g$ est identiquement nulle. [S]
3. Montrer que s'il existe un réel x de $\mathbb{R}$ tel que $g(x) = 0$, alors g est identiquement nulle.
   Indication : Montrer que, pour tout entier n, $g\left(\frac{x}{2^n}\right) = 0$. [S]
4. En déduire que si g n'est pas identiquement nulle, alors $g(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{+*}$ ou $g(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{-*}$. [S]
5. En utilisant ce qui précède, et la première partie, déterminer $\mathcal{G}$. [S]

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.

Troisième partie

On appelle $\mathcal{H}$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$(3) \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R},\ h(x+y) + h(x-y) = 2(h(x) + h(y))$$

$$(4) \quad \exists\, \alpha > 0,\ \exists\, A \geq 0 \quad \text{tel que :} \quad \forall\, x \in [-\alpha, \alpha],\ |h(x)| \leq A$$

Soit h un élément de $\mathcal{H}$.

1. Montrer que, pour tout réel $\beta > 0$, h est bornée sur $[-\beta, \beta]$.

   Indication : soit n un entier tel que $\dfrac{\beta}{2^n} \leq \alpha$.

   Utiliser, pour tout réel x, l'égalité $h\left(\dfrac{x}{2^n}\right) = \dfrac{h(x)}{2^{2n}}$. [S]
2. Démontrer que : $\forall\, a \in \mathbb{R}$, $\exists\, M \geq 0$ tel que $\forall\, x \in [-1, 1] \cup [a-1, a+1]$, $|h(x)| \leq M$. [S]
3. Avec les notations précédentes, montrer que

   $$\forall\, (u, n) \in [-1, 1] \times \mathbb{N},\ \left|h\left(a + \frac{u}{2^n}\right) - h(a)\right| \leq \frac{3 \cdot 2^n - 1}{4^n} M$$

   [S]
4. En déduire que h est continue en a. [S]
5. Déterminer l'ensemble $\mathcal{H}$. [S]

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.