Polynômes de Chebyshev et théorème de Weierstrass

Dans ce problème on se propose d'établir le résultat suivant :

Théorème de Weirstrass

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application continue.
Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme P tel que : $\forall\, x \in [a, b],\ |f(x) - P(x)| \leq \varepsilon$

Ainsi toute application continue sur un segment peut être approchée uniformément sur ce segment à moins de ε (où ε est un réel strictement positif quelconque) par un polynôme.

La première partie introduit les polynômes de Chebyshev T_n.

La seconde partie propose une démonstration du théorème de Weierstrass utilisant les T_n.

Partie I. Polynômes de Chebyshev

Dans cette partie, n est un entier naturel non nul donné.

Pour tout x de $[-1, 1]$, on pose $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$.

1. (a) Expliciter $T_n(x)$ si $n = 1$ ou $n = 2$. [S]
   (b) Montrer que pour tout x de $[-1, 1]$, on a : $T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x)$. [S]
   (c) Montrer que T_n est un polynôme de degré n.
   Quel est son coefficient dominant ? [S]
2. (a) Montrer que T_n possède n racines distinctes dans $]-1, 1[$, que l'on calculera.
   On notera $a_1, \ldots, a_n$ ces racines, avec $1 > a_1 > a_2 > \cdots > a_{n-1} > a_n > -1$. [S]
   (b) Avec les notations précédentes, calculer $T_n'(a_k)$ et $T_n''(a_k)$ en fonction de k, n, a_k. [S]
   (c) Pour tout k de $\{1, \ldots, n\}$, on note Q_k le polynôme défini par $T_n(x) = (x - a_k)Q_k(x)$.
   Calculer $Q_k(a_k)$ et $Q_k'(a_k)$ en fonction de k, n, a_k. [S]
3. Soit k un élément de $\{1, 2, \ldots, n\}$. On rappelle que $\delta_{j\,k} = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k \\ 1 & \text{si } j = k \end{cases}$
   (a) Montrer qu'il existe un unique polynôme U_k, de degré $2n - 1$, tel que :
   $$\forall\, j \in \{1, \ldots, n\}, \quad U_k(a_j) = \delta_{j\,k} \quad \text{et} \quad U_k'(a_j) = 0.$$
   Montrer plus précisément que ce polynôme est donné par : $U_k = \dfrac{1}{n^2}\,(1 - a_k x)\,Q_k^2$.
   Indication : montrer que U_k, s'il existe, est nécessairement divisible par Q_k^2. [S]
   (b) Montrer que $U_k(x) \geq 0$ sur $[-1, 1]$ et que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} U_k(x) = 1$. [S]

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

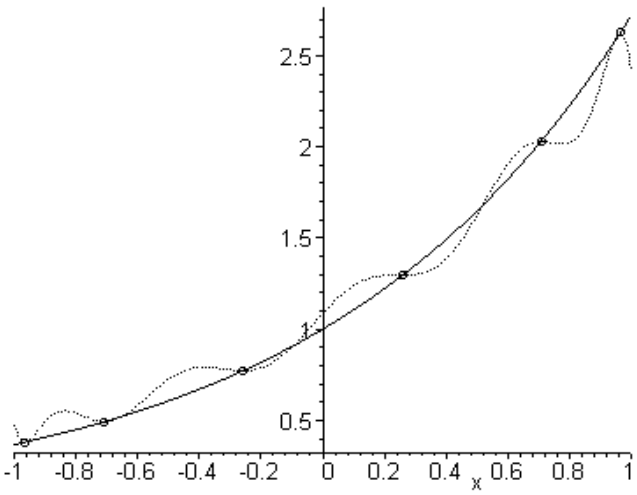
Extrait gratuit de document, le document original comporte 6 pages.

Partie II. Théorème de Weierstrass

Soit f une application continue sur le segment $[-1,1]$. On pose $M = \sup_{t\in[-1,1]} |f(t)|$.

1. Montrer qu'il existe un unique polynôme F_n tel que :
   $\deg F_n \leq 2n-1$ et $\forall\, k \in \{1,\dots,n\}$, $\begin{cases} F_n(a_k) = f(a_k) \\ F_n'(a_k) = 0 \end{cases}$
   Indication : on cherchera à exprimer F_n en fonction des polynômes U_k. [S]
2. Dans cette question, ε est un réel strictement positif donné, et x est fixé dans $[-1,1]$.
   (a) Justifier l'existence d'un réel strictement positif α tel que :
   $$\forall\,(y,z) \in [-1,1]^2,\ |y-z| \leq \alpha \Rightarrow |f(y)-f(z)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$
   Dans la suite de cette question, on note $J = \{k, 1 \leq k \leq n, |x-a_k| > \alpha\}$. [S]
   (b) Montrer que $|f(x) - F_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + 2M \sum_{k\in J} U_k(x)$ (utiliser I.3.b) [S]
   (c) Prouver que $\sum_{k\in J} U_k(x) \leq \frac{2}{n\alpha^2}$. [S]
3. (a) En déduire qu'il existe un polynôme P tel que $\forall\, x \in [-1,1],\ |f(x) - P(x)| \leq \varepsilon$. [S]
   (b) La question précédente établit donc le théorème de Weierstrass sur le segment $[-1,1]$. Prouver que ce résultat s'étend à un segment $[a,b]$ quelconque. [S]
4. Ecrire une procédure Maple, sur le modèle `pol :=proc(f,n)...end` prenant en argument une fonction f et un entier naturel non nul n. Cette procédure doit calculer le polynôme F_n (avec les notations de la question II.1) puis afficher sur $[-1,1]$ la courbe représentative de f, celle de F_n (en pointillés) et l'ensemble des points d'abscisse a_k de ces courbes.
   Voici un exemple d'utilisation, avec $f(x) = \exp(x)$ et $n = 6$:

```
> pol(exp,6) ;
```



[S]

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 6 pages.