Matrices et carrés magiques

Dans tout le problème, n est un entier supérieur ou égal à 2.

On désigne par $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.

Pour tout A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note a_{ij} le coefficient de A en ligne i, colonne j. On note $A = (a_{ij})$.

On note I_n la matrice identité d'ordre n

On note J_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.

On note (E_{ij}) la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: pour tout couple (i,j) de $\{1,\ldots,n\}^2$, E_{ij} est la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui situé en position (i,j), qui vaut 1.

Pour toute matrice $A = (a_{ij})$ et tous entiers i,j de $\{1,\ldots,n\}$, on note :

$$\varphi_i(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \quad , \quad \psi_j(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \quad , \quad \mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \quad , \quad \delta(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,n+1-i}$$

Ainsi : $\begin{cases} \varphi_i(A) \text{ est la somme des coefficients de la } i\text{-ème ligne de } A. \\ \psi_j(A) \text{ est la somme des coefficients de la } j\text{-ème colonne de } A. \\ \mathrm{tr}(A) \text{ est la somme des coefficients de la diagonale } \textit{principale} \text{ de } A \text{ (la trace de } A). \\ \delta(A) \text{ est la somme des coefficients de la diagonale } \textit{non principale} \text{ de } A. \end{cases}$

On note $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des matrices A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\forall (i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2, \varphi_i(A) = \psi_j(A)$.

Pour toute matrice A de $\mathcal{P}_n$, on note $\sigma(A)$ la valeur commune des quantités $\varphi_i(A)$ et $\psi_j(A)$.

On note $\mathcal{Q}_n$ le sous-ensemble de $\mathcal{P}_n$ des matrices A qui vérifient en outre $\mathrm{tr}(A) = \delta(A) = \sigma(A)$.

Les matrices de $\mathcal{P}_n$ sont dites *semi-magiques* ; celles de $\mathcal{Q}_n$ sont dites *magiques*.

On dit qu'une matrice magique A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un *carré magique* d'ordre n si l'ensemble des coefficients de A est égal à $\{1,2,\ldots,n^2\}$.
Par exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 16 & 2 & 3 & 13 \\ 5 & 11 & 10 & 8 \\ 9 & 7 & 6 & 12 \\ 4 & 14 & 15 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 17 & 24 & 1 & 8 & 15 \\ 23 & 5 & 7 & 14 & 16 \\ 4 & 6 & 13 & 20 & 22 \\ 10 & 12 & 19 & 21 & 3 \\ 11 & 18 & 25 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

sont des carrés magiques d'ordres respectifs 3, 4, 5.

Partie I

1. *Question préliminaire*

   Soit $\mathcal{E}$ un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$.

   Soit $f_1, f_2, \ldots, f_p$ une famille de p formes linéaires indépendantes sur $\mathcal{E}$, avec $1 \leq p \leq n$.

   Soit $\mathcal{H} = \{x \in \mathcal{E}, f_1(x) = f_2(x) = \cdots = f_p(x) = 0\}$.

   Montrer que $\mathcal{H}$ est un sous-espace vectoriel de dimension $n - p$ de $\mathcal{E}$.
   Indication : compléter la famille $f_1, \ldots, f_p$ en une base (f) du dual de $\mathcal{E}$, puis introduire la base (e) de $\mathcal{E}$ dont (f) est la base duale. [S]

2. Montrer que $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ et $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ sont des formes linéaires sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. [S]

3. Montrer rapidement que les formes linéaires $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ sont liées. [S]

4. Montrer que $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}$ sont libres.
   On utilisera les matrices E_{kn} (avec $1 \leq k \leq n$) puis les E_{nk} (avec $1 \leq k \leq n-1$). [S]

5. Dans cette question, on cherche la dimension de $\mathcal{P}_n$.
   Pour tout i de $\{1, \ldots, n-1\}$, on pose $\Phi_i = \varphi_i - \varphi_n$ et $\Psi_i = \psi_i - \varphi_n$.

   (a) Montrer que les formes linéaires $\Phi_1, \ldots, \Phi_{n-1}, \Psi_1, \ldots, \Psi_{n-1}$ sont indépendantes. [S]

   (b) Montrer qu'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dans $\mathcal{P}_n$ $\Leftrightarrow$ on a les égalités :

   $\Phi_1(A) = \cdots = \Phi_{n-1}(A) = \Psi_1(A) = \ldots = \Psi_{n-1}(A) = 0$. [S]

   (c) En déduire que $\mathcal{P}_n$ est un sous-espace de dimension $n^2 - 2n + 2$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. [S]

6. Dans cette question, on cherche la dimension de $\mathcal{Q}_n$.

   On rappelle que l'application $A \to \sigma(A)$ est la forme linéaire définie sur $\mathcal{P}_n$ par la restriction commune à $\mathcal{P}_n$ de chacune des formes linéaires φ_i et ψ_j.

   (a) Identifier les matrices de $\mathcal{P}_2$ et celle de $\mathcal{Q}_2$. [S]

   (b) On suppose provisoirement que n est supérieur ou égal à 3.

   Soient f, g les formes linéaires sur $\mathcal{P}_n$ définie par : $\forall A \in \mathcal{P}_n \quad \begin{cases} f(A) = \operatorname{tr}(A) - \sigma(A) \\ g(A) = \delta(A) - \sigma(A) \end{cases}$

   Montrer que f et g sont indépendantes (indication : utiliser deux matrices A particulières de $\mathcal{P}_n$ telles que $\sigma(A) = 0$.) [S]

   (c) Déduire de ce qui précède que $\mathcal{Q}_n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, de dimension $n^2 - 2n$ si $n \geq 3$, et de dimension 1 si $n = 2$. [S]

Partie II

1. Montrer que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dans $\mathcal{P}_n \Leftrightarrow$ il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $AJ_n = J_nA = \lambda J_n$. Quelle est alors la signification de λ ? [S]
2. Montrer que $\mathcal{P}_n$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En est-il de même de $\mathcal{Q}_n$? [S]
3. Montrer que l'application σ est un morphisme d'algèbres de $\mathcal{P}_n$ dans $\mathbb{R}$. [S]
4. Soit A une matrice de $\mathcal{P}_n$.
   (a) On suppose que A est inversible.
   Montrer alors que $\sigma(A)$ est non nul, que A^{-1} est dans $\mathcal{P}_n$ et que $\sigma(A^{-1}) = \dfrac{1}{\sigma(A)}$. [S]
   (b) Réciproquement, on suppose seulement que $\sigma(A)$ est non nul.
   Peut-on en conclure que A est inversible ? [S]
5. Pour $n = 3$ et $n = 4$, trouver une matrice A de $\mathcal{Q}_n$ dont le carré n'est pas dans $\mathcal{Q}_n$. [S]

Partie III

Dans cette partie, on suppose que n est égal à 3.

1. Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de $\mathcal{Q}_n$. On note $\alpha = a_{22}$.
   (a) Montrer que $\sigma(A) = 3\alpha$. [S]
   (b) Montrer que $B = A - \alpha J_3 = (b_{ij})$ est un élément de $\mathcal{Q}_3$ tel que $\sigma(B) = 0$. [S]
   (c) On note $\beta = b_{11}$ et $\gamma = b_{31}$. Exprimer B en fonction α, β, γ.
   Montrer que l'expression de A en fonction de α, β, γ est :
   $$A = \begin{pmatrix} \beta+\alpha & -\beta+\gamma+\alpha & -\gamma+\alpha \\ -\beta-\gamma+\alpha & \alpha & \beta+\gamma+\alpha \\ \gamma+\alpha & \beta-\gamma+\alpha & -\beta+\alpha \end{pmatrix}$$
   [S]
   (d) Réciproquement, vérifier que l'expression précédente de A donne toutes les matrices de l'espace vectoriel $\mathcal{Q}_3$.
   Retrouver ainsi que $\mathcal{Q}_3$ est de dimension 3 et en préciser une base. [S]
2. On reprend l'expression générale de la matrice A de $\mathcal{Q}_n$ vue dans la question (1c).
   (a) Montrer que A est à coefficients dans $\mathbb{N} \Leftrightarrow \alpha, \beta, \gamma$ sont des entiers relatifs vérifiant les conditions $|\beta+\gamma| \le \alpha$ et $|\beta-\gamma| \le \alpha$.
   Montrer que A est à coefficients dans $\mathbb{N}^* \iff$ ces inégalités sont strictes. [S]
   (b) Montrer que ces deux conditions sur α, β, γ équivalent à dire que le point $\Omega(\beta, \gamma)$ du plan appartient (respectivement est intérieur) au domaine carré K_α dont les sommets sont les points $(\pm\alpha, 0)$, et $(0, \pm\alpha)$. [S]

(c) Pour tout entier naturel α, déterminer le nombre de points à coordonnées entières qui appartiennent à la frontière du domaine K_α, puis le nombre de tels points qui appartiennent à K_α (bords compris). [S]

(d) En déduire que pour tout entier naturel α, il y a :

- $2\alpha^2 + 2\alpha + 1$ matrices A de $\mathcal{Q}_n$ qui sont à coefficients dans $\mathbb{N}$.
- $2\alpha^2 - 2\alpha + 1$ matrices A de $\mathcal{Q}_n$ qui sont à coefficients dans $\mathbb{N}^*$.

[S]

3. On se propose de trouver tous les carrés magiques A d'ordre 3.

   (a) Montrer que le coefficient a_{22} est nécessairement égal à 5. [S]

   (b) Montrer qu'à une rotation ou à une symétrie près du tableau A, on peut toujours se ramener à $a_{11} = 1$ ou à $a_{21} = 1$. [S]

   (c) En déduire les 8 carrés magiques d'ordre 3. [S]

4. Calculer les déterminants des matrices A, B et C, utilisées comme exemples dans le préambule du problème. [S]

Corrigé du problème

Partie I

1. D'après le théorème de la base incomplète, il est possible de trouver des formes linéaires $f_{p+1},\ldots,f_n$ telles que $(f) = f_1, f_2, \ldots, f_p, \ldots, f_n$ soit une base de $\mathcal{E}^*$.
   (f) est de manière unique la base duale d'une base $(e) = e_1, e_2, \ldots, e_n$ de $\mathcal{E}$.
   On sait que tout x de $\mathcal{E}$ s'écrit sur cette base en $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, avec $x_i = f_i(x)$.
   On en déduit que x est dans $\mathcal{H}$ si et seulement si $x_1 = x_2 = \cdots = x_p = 0$, c'est-à-dire $\Leftrightarrow$ x est uniquement combinaison linéaire de $e_{p+1},\ldots,e_n$.
   Ainsi $\mathcal{H} = \text{Vect}\,\{e_{p+1},\ldots,e_n\}$: $\mathcal{H}$ est donc un sous-espace de dimension $n-p$ de $\mathcal{E}$. [Q]
2. Pour tout couple (k,l), l'application qui à une matrice $A = (a_{ij})$ associe son coefficient a_{kl} est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (c'est la *forme coordonnée* associée à la matrice E_{kl} de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.)
   Les applications φ_i et ψ_j, qui sont des sommes de telles formes coordonnées, sont donc elles-mêmes des formes linéaires sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. [Q]
3. Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la quantité $\varphi_1(A) + \varphi_2(A) + \cdots + \varphi_n(A)$ représente la somme de tous les coefficients de A.
   Il en est de même de $\psi_1(A) + \psi_2(A) + \cdots + \psi_n(A)$.
   On a donc l'égalité $\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_n = \psi_1+\psi_2+\cdots+\psi_n$, ce qui répond à la question. [Q]
4. On se donne des scalaires $\lambda_1,\ldots,\lambda_n,\mu_1,\ldots,\mu_{n-1}$ tels que $\phi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\varphi_i + \sum_{j=1}^{n-1} \mu_j\psi_j \neq 0$.
   Il faut montrer que les λ_i et les μ_j sont nuls.
   Soit k un entier de $\{1,\ldots,n\}$, et $A = E_{kn}$.
   On a $\varphi_k(A) = 1$ et $\varphi_i(A) = 0$ si $i \neq k$. De même, $\psi_j(A) = 0$ si $j \leq n-1$.
   On en déduit $0 = \phi(A) = \lambda_k$. Ainsi les coefficients λ_k sont nuls.
   Supposons maintenant $1 \leq k \leq n-1$ et soit $A = E_{nk}$.
   On a $\psi_k(A) = 1$ et $\psi_j(A) = 0$ si $j \neq k$.
   On en déduit (sachant que les λ_i sont nuls) : $0 = \phi(A) = \mu_k$. Ainsi les μ_k sont nuls.
   Conclusion : les formes linéaires $\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n,\psi_1,\psi_2,\ldots,\psi_{n-1}$ sont libres. [Q]
5. (a) On se donne les $2n-2$ scalaires $\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-1},\mu_1,\ldots,\mu_{n-1}$.

$$\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i\Phi_i + \sum_{i=1}^{n-1}\mu_i\Psi_i = 0 \iff \sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i\varphi_i - \sum_{i=1}^{n-1}(\lambda_i+\mu_i)\varphi_n + \sum_{i=1}^{n-1}\mu_i\psi_i = 0$$

   De la question précédente, il découle que les λ_i et les μ_i sont nuls.

   Ainsi les $2n-2$ formes linéaires $\Phi_1,\ldots,\Phi_{n-1},\Psi_1,\ldots,\Psi_{n-1}$ sont indépendantes. [Q]