Matrices et carrés magiques

Dans tout le problème, n est un entier supérieur ou égal à 2.

On désigne par $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.

Pour tout A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note a_{ij} le coefficient de A en ligne i, colonne j. On note $A = (a_{ij})$.

On note I_n la matrice identité d'ordre n

On note J_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.

On note (E_{ij}) la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: pour tout couple (i,j) de $\{1,\dots,n\}^2$, E_{ij} est la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui situé en position (i,j), qui vaut 1.

Pour toute matrice $A = (a_{ij})$ et tous entiers i, j de $\{1,\dots,n\}$, on note :

$$\varphi_i(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \quad , \quad \psi_j(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \quad , \quad \mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \quad , \quad \delta(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,n+1-i}$$

Ainsi : $\begin{cases} \varphi_i(A) \text{ est la somme des coefficients de la } i\text{-ème ligne de } A. \\ \psi_j(A) \text{ est la somme des coefficients de la } j\text{-ème colonne de } A. \\ \mathrm{tr}(A) \text{ est la somme des coefficients de la diagonale } \textit{principale} \text{ de } A \text{ (la trace de } A). \\ \delta(A) \text{ est la somme des coefficients de la diagonale } \textit{non principale} \text{ de } A. \end{cases}$

On note $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des matrices A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\forall (i,j) \in \{1,\dots,n\}^2, \varphi_i(A) = \psi_j(A)$.

Pour toute matrice A de $\mathcal{P}_n$, on note $\sigma(A)$ la valeur commune des quantités $\varphi_i(A)$ et $\psi_j(A)$.

On note $\mathcal{Q}_n$ le sous-ensemble de $\mathcal{P}_n$ des matrices A qui vérifient en outre $\mathrm{tr}(A) = \delta(A) = \sigma(A)$.

Les matrices de $\mathcal{P}_n$ sont dites *semi-magiques* ; celles de $\mathcal{Q}_n$ sont dites *magiques*.

On dit qu'une matrice magique A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un *carré magique* d'ordre n si l'ensemble des coefficients de A est égal à $\{1, 2, \dots, n^2\}$.
Par exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 16 & 2 & 3 & 13 \\ 5 & 11 & 10 & 8 \\ 9 & 7 & 6 & 12 \\ 4 & 14 & 15 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 17 & 24 & 1 & 8 & 15 \\ 23 & 5 & 7 & 14 & 16 \\ 4 & 6 & 13 & 20 & 22 \\ 10 & 12 & 19 & 21 & 3 \\ 11 & 18 & 25 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

sont des carrés magiques d'ordres respectifs 3, 4, 5.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 13 pages.

Partie I

1. *Question préliminaire*

   Soit $\mathcal{E}$ un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$.

   Soit $f_1, f_2, \ldots, f_p$ une famille de p formes linéaires indépendantes sur $\mathcal{E}$, avec $1 \leq p \leq n$.

   Soit $\mathcal{H} = \{x \in \mathcal{E}, f_1(x) = f_2(x) = \cdots = f_p(x) = 0\}$.

   Montrer que $\mathcal{H}$ est un sous-espace vectoriel de dimension $n - p$ de $\mathcal{E}$.
   Indication : compléter la famille $f_1, \ldots, f_p$ en une base (f) du dual de $\mathcal{E}$, puis introduire la base (e) de $\mathcal{E}$ dont (f) est la base duale. [S]

2. Montrer que $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ et $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ sont des formes linéaires sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. [S]

3. Montrer rapidement que les formes linéaires $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ sont liées. [S]

4. Montrer que $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}$ sont libres.
   On utilisera les matrices E_{kn} (avec $1 \leq k \leq n$) puis les E_{nk} (avec $1 \leq k \leq n-1$). [S]

5. Dans cette question, on cherche la dimension de $\mathcal{P}_n$.
   Pour tout i de $\{1, \ldots, n-1\}$, on pose $\Phi_i = \varphi_i - \varphi_n$ et $\Psi_i = \psi_i - \varphi_n$.

   (a) Montrer que les formes linéaires $\Phi_1, \ldots, \Phi_{n-1}, \Psi_1, \ldots, \Psi_{n-1}$ sont indépendantes. [S]

   (b) Montrer qu'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dans $\mathcal{P}_n \Leftrightarrow$ on a les égalités :
   $\Phi_1(A) = \cdots = \Phi_{n-1}(A) = \Psi_1(A) = \ldots = \Psi_{n-1}(A) = 0$. [S]

   (c) En déduire que $\mathcal{P}_n$ est un sous-espace de dimension $n^2 - 2n + 2$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. [S]

6. Dans cette question, on cherche la dimension de $\mathcal{Q}_n$.

   On rappelle que l'application $A \to \sigma(A)$ est la forme linéaire définie sur $\mathcal{P}_n$ par la restriction commune à $\mathcal{P}_n$ de chacune des formes linéaires φ_i et ψ_j.

   (a) Identifier les matrices de $\mathcal{P}_2$ et celle de $\mathcal{Q}_2$. [S]

   (b) On suppose provisoirement que n est supérieur ou égal à 3.

   Soient f, g les formes linéaires sur $\mathcal{P}_n$ définie par : $\forall A \in \mathcal{P}_n \quad \begin{cases} f(A) = \mathrm{tr}(A) - \sigma(A) \\ g(A) = \delta(A) - \sigma(A) \end{cases}$

   Montrer que f et g sont indépendantes (indication : utiliser deux matrices A particulières de $\mathcal{P}_n$ telles que $\sigma(A) = 0$.) [S]

   (c) Déduire de ce qui précéde que $\mathcal{Q}_n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, de dimension $n^2 - 2n$ si $n \geq 3$, et de dimension 1 si $n = 2$. [S]

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 13 pages.

Partie II

1. Montrer que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dans $\mathcal{P}_n \Leftrightarrow$ il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $AJ_n = J_nA = \lambda J_n$.
   Quelle est alors la signification de λ ? [S]
2. Montrer que $\mathcal{P}_n$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En est-il de même de $\mathcal{Q}_n$? [S]
3. Montrer que l'application σ est un morphisme d'algèbres de $\mathcal{P}_n$ dans $\mathbb{R}$. [S]
4. Soit A une matrice de $\mathcal{P}_n$.
   (a) On suppose que A est inversible.
   Montrer alors que $\sigma(A)$ est non nul, que A^{-1} est dans $\mathcal{P}_n$ et que $\sigma(A^{-1}) = \dfrac{1}{\sigma(A)}$. [S]
   (b) Réciproquement, on suppose seulement que $\sigma(A)$ est non nul.
   Peut-on en conclure que A est inversible ? [S]
5. Pour $n = 3$ et $n = 4$, trouver une matrice A de $\mathcal{Q}_n$ dont le carré n'est pas dans $\mathcal{Q}_n$. [S]

Partie III

Dans cette partie, on suppose que n est égal à 3.

1. Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de $\mathcal{Q}_n$. On note $\alpha = a_{22}$.
   (a) Montrer que $\sigma(A) = 3\alpha$. [S]
   (b) Montrer que $B = A - \alpha J_3 = (b_{ij})$ est un élément de $\mathcal{Q}_3$ tel que $\sigma(B) = 0$. [S]
   (c) On note $\beta = b_{11}$ et $\gamma = b_{31}$. Exprimer B en fonction α, β, γ.
   Montrer que l'expression de A en fonction de α, β, γ est :
   $$A = \begin{pmatrix} \beta+\alpha & -\beta+\gamma+\alpha & -\gamma+\alpha \\ -\beta-\gamma+\alpha & \alpha & \beta+\gamma+\alpha \\ \gamma+\alpha & \beta-\gamma+\alpha & -\beta+\alpha \end{pmatrix}$$
   [S]
   (d) Réciproquement, vérifier que l'expression précédente de A donne toutes les matrices de l'espace vectoriel $\mathcal{Q}_3$.
   Retrouver ainsi que $\mathcal{Q}_3$ est de dimension 3 et en préciser une base. [S]
2. On reprend l'expression générale de la matrice A de $\mathcal{Q}_n$ vue dans la question (1c).
   (a) Montrer que A est à coefficients dans $\mathbb{N} \Leftrightarrow \alpha, \beta, \gamma$ sont des entiers relatifs vérifiant les conditions $|\beta+\gamma| \leq \alpha$ et $|\beta-\gamma| \leq \alpha$.
   Montrer que A est à coefficients dans $\mathbb{N}^* \iff$ ces inégalités sont strictes. [S]
   (b) Montrer que ces deux conditions sur α, β, γ équivalent à dire que le point $\Omega(\beta, \gamma)$ du plan appartient (respectivement est intérieur) au domaine carré K_α dont les sommets sont les points $(\pm\alpha, 0)$, et $(0, \pm\alpha)$. [S]

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 13 pages.

(c) Pour tout entier naturel α, déterminer le nombre de points à coordonnées entières qui appartiennent à la frontière du domaine K_α, puis le nombre de tels points qui appartiennent à K_α (bords compris). [S]

(d) En déduire que pour tout entier naturel α, il y a :

- $2\alpha^2 + 2\alpha + 1$ matrices A de $\mathcal{Q}_n$ qui sont à coefficients dans $\mathbb{N}$.
- $2\alpha^2 - 2\alpha + 1$ matrices A de $\mathcal{Q}_n$ qui sont à coefficients dans $\mathbb{N}^*$.

[S]

3. On se propose de trouver tous les carrés magiques A d'ordre 3.

(a) Montrer que le coefficient a_{22} est nécessairement égal à 5. [S]

(b) Montrer qu'à une rotation ou à une symétrie près du tableau A, on peut toujours se ramener à $a_{11} = 1$ ou à $a_{21} = 1$. [S]

(c) En déduire les 8 carrés magiques d'ordre 3. [S]

4. Calculer les déterminants des matrices A, B et C, utilisées comme exemples dans le préambule du problème. [S]

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 13 pages.

Corrigé du problème

Partie I

1. D'après le théorème de la base incomplète, il est possible de trouver des formes linéaires $f_{p+1}, \dots, f_n$ telles que $(f) = f_1, f_2, \dots, f_p, \dots, f_n$ soit une base de $\mathcal{E}^*$.
   (f) est de manière unique la base duale d'une base $(e) = e_1, e_2, \dots, e_n$ de $\mathcal{E}$.
   On sait que tout x de $\mathcal{E}$ s'écrit sur cette base en $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, avec $x_i = f_i(x)$.
   On en déduit que x est dans $\mathcal{H}$ si et seulement si $x_1 = x_2 = \cdots = x_p = 0$, c'est-à-dire $\Leftrightarrow$ x est uniquement combinaison linéaire de $e_{p+1}, \dots, e_n$.
   Ainsi $\mathcal{H} = \text{Vect}\{e_{p+1}, \dots, e_n\}$: $\mathcal{H}$ est donc un sous-espace de dimension $n-p$ de $\mathcal{E}$. [Q]
2. Pour tout couple (k, l), l'application qui à une matrice $A = (a_{ij})$ associe son coefficient a_{kl} est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (c'est la *forme coordonnée* associée à la matrice E_{kl} de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.)
   Les applications φ_i et ψ_j, qui sont des sommes de telles formes coordonnées, sont donc elles-mêmes des formes linéaires sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. [Q]
3. Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la quantité $\varphi_1(A) + \varphi_2(A) + \cdots + \varphi_n(A)$ représente la somme de tous les coefficients de A.
   Il en est de même de $\psi_1(A) + \psi_2(A) + \cdots + \psi_n(A)$.
   On a donc l'égalité $\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_n = \psi_1 + \psi_2 + \cdots + \psi_n$, ce qui répond à la question. [Q]
4. On se donne des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_{n-1}$ tels que $\phi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_i + \sum_{j=1}^{n-1} \mu_j \psi_j \neq 0$.
   Il faut montrer que les λ_i et les μ_j sont nuls.
   Soit k un entier de $\{1, \dots, n\}$, et $A = E_{kn}$.
   On a $\varphi_k(A) = 1$ et $\varphi_i(A) = 0$ si $i \neq k$. De même, $\psi_j(A) = 0$ si $j \leq n-1$.
   On en déduit $0 = \phi(A) = \lambda_k$. Ainsi les coefficients λ_k sont nuls.
   Supposons maintenant $1 \leq k \leq n-1$ et soit $A = E_{nk}$.
   On a $\psi_k(A) = 1$ et $\psi_j(A) = 0$ si $j \neq k$.
   On en déduit (sachant que les λ_i sont nuls) : $0 = \phi(A) = \mu_k$. Ainsi les μ_k sont nuls.
   Conclusion : les formes linéaires $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}$ sont libres. [Q]
5. (a) On se donne les $2n-2$ scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, \mu_1, \dots, \mu_{n-1}$.

$$\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \Phi_i + \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i \Psi_i = 0 \iff \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \varphi_i - \sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_i + \mu_i)\varphi_n + \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i \psi_i = 0$$

   De la question précédente, il découle que les λ_i et les μ_i sont nuls.
   Ainsi les $2n-2$ formes linéaires $\Phi_1, \dots, \Phi_{n-1}, \Psi_1, \dots, \Psi_{n-1}$ sont indépendantes. [Q]

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 13 pages.