Décomposition LU d'une matrice inversible

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Une décomposition "LU" de A est une égalité $A = LU$, où L est une matrice triangulaire inférieure (L pour "Low") à diagonale unité (tous les coefficients diagonaux valent 1), et où U est une matrice triangulaire supérieure (U pour "Up").

Par exemple, $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -3 & 2 \\ 4 & -9 & -2 & 3 \\ -2 & 5 & 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

Pour tout entier k de $\{1, \dots, n\}$, on appelle *sous-matrice principale d'ordre k de A*, la sous matrice A_k formée à l'intersection des k premières lignes et des k premières colonnes de A.
Par exemple, avec la matrice A de l'exemple précédent :

$$A_1 = (2), \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -2 & 2 & -3 \\ 4 & -9 & -2 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -3 & 2 \\ 4 & -9 & -2 & 3 \\ -2 & 5 & 5 & -4 \end{pmatrix}$$

Dans tout le problème, la matrice A est supposée inversible.

Partie I

Dans cette partie, on voit une condition nécessaire et suffisante portant sur la matrice A pour qu'elle admette une décomposition LU.

1. Montrer que la décomposition LU de A, si elle existe, est unique. [S]
2. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ possède une décomposition LU.
   Montrer en revanche que la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ n'en possède pas. [S]
3. On suppose que la matrice A possède une décomposition LU.
   Montrer que toutes ses sous-matrices principales sont inversibles. Pour cela, on utilisera une décomposition par blocs de A, L, U, sous la forme suivante :
   $$A = \begin{pmatrix} A_k & A'_k \\ A''_k & A'''_k \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} L_k & 0 \\ L''_k & L'''_k \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} U_k & U'_k \\ 0 & U'''_k \end{pmatrix}$$
   [S]
4. Montrer que la réciproque de la propriété précédente est vraie : si toutes les sous-matrices principales de A sont inversibles, alors A possède une décomposition LU.
   Pour cela, on raisonnera par récurrence sur l'ordre n de A : dans le passage du rang n au rang $n+1$, on écrira $L_{n+1} = \begin{pmatrix} L_n & 0 \\ R_n & 1 \end{pmatrix}$ et $U_{n+1} = \begin{pmatrix} U_n & C_n \\ 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ où R_n est une matrice-ligne de largeur n, C_n est une matrice-colonne de hauteur n, et λ_n est un scalaire. [S]
5. Conclusion ? [S]

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 14 pages.

Partie II

Dans cette partie, on suppose que la matrice A possède une décomposition LU et on voit comment mettre en œuvre une méthode de calcul des matrices L et U.

On note a_{ij}, ℓ_{ij}, et a_{ij} les termes généraux de A, L, U.

1. A titre d'exemple, trouver la décomposition LU de $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -2 & 2 & -3 \\ 4 & -9 & -2 \end{pmatrix}$. [S]
2. On revient maintenant au cas général.
   Ecrire les égalités donnant a_{ik} en fonction des ℓ_{ij} (avec $j \leq i$) et u_{jk} (avec $j \leq k$). [S]
3. En déduire les expressions :
   (a) De u_{ik}, pour $i \leq k$, en fonction de a_{ik}, de ℓ_{ij} $(j < i)$, de u_{jk} $(j < i)$. [S]
   (b) De ℓ_{ik}, pour $i > k$, en fonction de a_{ik}, de ℓ_{ij} $(j < k)$, de u_{jk} $(j \leq k)$. [S]
4. Montrer comment les égalités obtenues permettent de calculer de proche en proche (et on précisera dans quel ordre) tous les coefficients de L et de U. [S]

Partie III

On sait qu'il existe des matrices A qui n'ont pas de décomposition LU.

Dans cette partie, on va voir que pour une telle matrice, il est possible de trouver une matrice inversible "simple" P telle que PA admette une décomposition LU.

On appelle *matrice de permutation* toute matrice P_σ d'ordre n dont le terme général p_{ij} peut s'écrire $p_{ij} = \delta_{i,\sigma(i)}$ (notations de Kronecker), où σ est une permutation de $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Si par exemple $n = 4$ et σ est définie par $\begin{cases} \sigma(1) = 3 \\ \sigma(2) = 2 \\ \sigma(3) = 4 \\ \sigma(4) = 1 \end{cases}$, alors $P_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1. Dans cette question, on étudie quelques propriétés des matrices de permutation.
   (a) Que représente P_σ si σ est la permutation "identité" de $\{1, \ldots, n\}$? [S]
   (b) Soient σ et s deux permutations de $\{1, \ldots, n\}$. Montrer que $P_\sigma P_s = P_{\sigma \circ s}$. [S]
   (c) Montrer que toute matrice P_σ est inversible. Quel est son inverse ? [S]
2. On va étudier l'influence du produit par une matrice de permutation.
   (a) Avec la matrice A du préambule et la matrice P_σ de l'exemple ci-dessus, calculer les produits $P_\sigma A$ et AP_σ^{-1}. Que remarque-t-on ? [S]
   (b) Plus généralement, pour toute matrice A d'ordre n, et toute matrice de permutation $P = P_\sigma$, comment passe-t-on de A à PA et de A à AP^{-1} ? [S]

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 14 pages.

3. On va montrer que pour toute matrice carrée A inversible et d'ordre n, il existe une matrice de permutation P telle que la matrice PA possède une décomposition LU.
   Pour cela, on raisonne par récurrence sur n.
4. Montrer que c'est évident si $n = 1$. [S]
   On suppose donc que la propriété est vraie pour un certain entier $n \geq 1$ et on se donne une matrice carrée A inversible et d'ordre $n+1$.
   (a) Montrer qu'il existe une matrice de permutation S telle que la sous-matrice principale B_n d'ordre n de $B = SA$ soit inversible. [S]
   (b) En appliquant l'hypothèse de récurrence à B_n, montrer qu'il existe une matrice de permutation Q telle que QB admette une décomposition LU. [S]
   (c) Conclure. [S]
5. Montrer très simplement que la décomposition $PA = LU$ n'est en général pas unique. Combien peut-il exister de triplets (P, L, U) au maximum ? [S]

Partie IV

Dans cette partie, M est une matrice quelconque d'ordre n, de coefficients m_{ij}.

On va étudier l'influence qu'ont certaines opérations sur les lignes ou les colonnes de M et interpréter ces opérations par des produits à gauche ou à droite par des matrices triangulaires inférieures à diagonale unité. Posons tout d'abord quelques notations :

– On note (E_{ij}) la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: la matrice E_{ij} est celle dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j, qui vaut 1.

– Pour tous indices i et j (avec $i \neq j$) et tout scalaire α, on note $\mathrm{L}_j \leftarrow \mathrm{L}_j - \alpha \mathrm{L}_i$ l'opération qui consiste à retrancher à la ligne d'indice j de M le produit par α de sa ligne d'indice i.

– On note $\mathrm{L}_i \leftrightarrow \mathrm{L}_j$ l'opération qui consiste à échanger les lignes d'indices i et j de M.

– On définit également les opérations $\mathrm{C}_j \leftarrow \mathrm{C}_j - \alpha \mathrm{C}_i$ et $\mathrm{C}_i \leftrightarrow \mathrm{C}_j$ sur les colonnes de M.

– Pour tout j de $\{1, \ldots, n-1\}$, et à condition que le coefficient diagonal m_{jj} soit non nul, on note $\varphi_j(M)$ la matrice obtenue en appliquant successivement à M les opérations :

$$\mathrm{L}_i \leftarrow \mathrm{L}_i - \lambda_{ij}\mathrm{L}_j, \text{ avec } \lambda_{ij} = \frac{m_{ij}}{m_{jj}}, \text{ pour tout } i \text{ de } \{j+1, \ldots, n\}$$

Dans cette opération, dont le but est d'annuler les coefficients sous-diagonaux de la colonne d'indice j de M, le coefficient diagonal m_{jj} est appelé le *pivot*.

1. Pour tout couple d'indices (i, j), comparer les lignes de la matrice $E_{ij}M$ et celles de M. Comparer aussi les colonnes de ME_{ij} et celles de M. [S]
2. Montrer qu'une opération du type $\mathrm{L}_i \leftarrow \mathrm{L}_i - \alpha \mathrm{L}_j$, avec $i > j$, transforme une matrice M en une matrice $M' = SM$, où $S = I_n - \alpha E_{ij}$ (et S est une matrice triangulaire inférieure à diagonale unité, ne dépendant que de i, j, α.) [S]
3. Avec les notations précédentes, identifier la matrice S^{-1} et interpréter le produit MS^{-1} comme une opération sur les colonnes de M. [S]

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 14 pages.

4. Montrer que si on transforme M en une matrice M' par une opération du type φ_j, alors il existe une matrice R triangulaire inférieure à diagonale unité telle que $RM = M'$. Détailler les coefficients de R. [S]
5. Avec les notations de la question précédente, interpréter le produit MR^{-1} comme une opération sur les colonnes de M. [S]

Partie V

Dans cette partie, A est une matrice carrée d'ordre n, inversible. On reprend les notations de la partie III, notamment en ce qui concerne les opérations φ_j.

On suppose que la matrice A possède une décomposition LU.

1. Montrer qu'on peut appliquer l'opération φ_1 à la matrice A, et qu'on transforme ainsi A en une matrice B dont les coefficients sous-diagonaux de colonne 1 sont nuls.) [S]
2. Soit k un entier de $\{2, \dots, n\}$.
   On suppose qu'on a appliqué à A les opérations $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{k-1}$ (dans cet ordre) et qu'on a ainsi transformé A en une matrice C dont les coefficients sous-diagonaux des $k-1$ premières colonnes sont nuls.
   Montrer que le k-ième coefficient diagonal de C est non nul. [S]
3. En déduire qu'on peut partir de A et appliquer successivement $\varphi_1, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}$. Montrer que la matrice obtenue est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux non nuls, et qu'elle est la matrice U de la décomposition $A = LU$. [S]
4. Montrer comment on peut construire la matrice L de la décomposition $A = LU$, en appliquant à la matrice I_n une succession d'opérations sur les colonnes, chacune de ces opérations correspondant à l'une de celles qui ont permis de passer de la matrice A à la matrice U. [S]
5. Appliquer ce qui précède à la recherche de la décomposition de la matrice A utilisée dans le préambule de l'énoncé. [S]

Partie VI

Dans cette partie, A est une matrice carrée d'ordre n, qui est seulement supposée inversible.

On se propose d'obtenir une décomposition $PA = LU$ (au sens de la partie III) par le biais d'opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes.

A la panoplie des opérations φ_i définies dans la partie IV, on ajoute les opérations θ_i^j : pour toute matrice M, $\theta_i^j(M)$ est la matrice obtenue échange des lignes d'indices i et j de M.

On pourra considérer que $\theta_{ii}(M) = M$.

1. Montrer qu'on peut appliquer une opération $\theta_{i_1}^1$ puis l'opération φ_1 à la matrice A, de manière à la transformer A en une matrice B dont les coefficients sous-diagonaux de colonne 1 sont nuls. [S]

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 14 pages.

2. Soit k un entier de $\{2, \ldots, n\}$.
   On suppose qu'on a appliqué A les opérations $\theta_{i_1}^1$, φ_1, $\theta_{i_2}^2$, φ_2, …, $\theta_{i_{k-1}}^{k-1}$, φ_{k-1} (dans cet ordre, avec $i_1 \geq 1$, $i_2 \geq 2$, …, $i_{k-1} \geq k-1$).
   On a ainsi transformé A en une matrice $C = (c_{ij})$ dont les coefficients sous-diagonaux des $k-1$ premières colonnes sont nuls.
   Montrer que l'un au moins des coefficients c_{ik}, avec $i \geq k$, est non nul. [S]
3. Montrer qu'il existe $n-1$ entiers $i_1, i_2, \ldots, i_n$ (avec $i_k \geq k$) tels que la succession (dans cet ordre) des opérations $\theta_{i_1}^1$, φ_1, …, $\theta_{i_k}^k$, φ_k, …, $\theta_{i_{n-1}}^{n-1}$, φ_{n-1} transforme A en une matrice U triangulaire supérieure à coefficients diagonaux non nuls. [S]

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 14 pages.