Polynômes dont les zéros vérifient des conditions données

Dans ce problème, on considère des polynômes à coefficients complexes.

Un polynôme est dit *normalisé* si le coefficient du terme de plus haut degré vaut 1.

1. Un polynôme Q, normalisé de degré 2, s'écrit : $Q(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^2 + p\mathrm{X} + q$.
   On note a et b ses zéros, distincts ou non.
   (a) Calculer $a^2 + b^2$ et $(ab)^2$ en fonction de p et q. [S]
   (b) Déterminer p et q pour que les zéros de Q soient a^2 et b^2. [S]
2. Soit A un polynôme normalisé de degré 2, de zéros a et b : $A(\mathrm{X}) = (\mathrm{X} - a)(\mathrm{X} - b)$.
   Donner la liste des polynômes A tels que $A(\mathrm{X})$ divise $A(\mathrm{X}^2)$. [S]
3. Soit B un polynôme normalisé de degré 2, de zéros a et b : $B(\mathrm{X}) = (\mathrm{X} - a)(\mathrm{X} - b)$.
   (a) Donner la liste des polynômes B tels que $B(\mathrm{X})$ divise $B(\mathrm{X}^3)$. [S]
   (b) Montrer (sans l'aide de cette liste) que si $B(\mathrm{X})$ est l'un de ces polynômes, alors $B(-\mathrm{X})$ en est un aussi. [S]
4. Un polynôme $P(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^3 + p\mathrm{X}^2 + q\mathrm{X} + r$, normalisé de degré 3, a pour zéros a, b, c.
   (a) Calculer $a^2 + b^2 + c^2$ et $(bc)^2 + (ca)^2 + (ab)^2$ en fonction des coefficients p, q, r. [S]
   (b) Déterminer p, q, r pour que les zéros de P soient a^2, b^2 et c^2. [S]
   (c) Donner la liste de ces polynômes P et vérifier que pour chacun d'eux :
   $P(\mathrm{X}^2) = -P(\mathrm{X})P(-\mathrm{X})$. [S]
5. Parmi les polynômes P précédents, on notera F_1 et F_2 les deux polynômes qui ne sont pas à coefficients tous réels.
   (a) Calculer le produit $F_1(\mathrm{X})F_2(\mathrm{X})$. [S]
   (b) Donner, sous forme trigonométrique, les zéros de chacun des polynômes F_1 et F_2. [S]
   (c) Former les polynômes normalisés de degré 3 ayant pour zéros les parties réelles des zéros de F_1 et F_2. [S]
   (d) Former les polynômes normalisés Φ_1 et Φ_2, de degré 3, ayant pour zéros les parties imaginaires des zéros des polynômes F_1 et F_2. [S]
   (e) Former le polynôme H tel que : $H(X) = 64X\Phi_1(X)\Phi_2(X)$. [S]
   (f) Montrer que $\sin 7\theta = -H(\sin\theta)$, $\cos 7\theta = H(\cos\theta)$, $\cosh 7\theta = H(\cosh\theta)$. [S]
6. On définit une relation $\mathcal{S}$ sur $\mathbb{R}$ en posant : $\forall\, x, y \in \mathbb{R},\ x\,\mathcal{S}\,y \Leftrightarrow H(x) = H(y)$.
   (a) Vérifier que $\mathcal{S}$ est une relation d'équivalence. [S]
   (b) Décrire la classe d'équivalence de x, quand $|x| > 1$ puis quand $|x| \leqslant 1$ [S]
   (c) On note Γ l'ensemble des points (x, y) du plan tels que $H(x) = H(y)$.
   Etablir que Γ est la réunion d'une droite et de trois ellipses.
   Construire Γ avec Maple. [S]

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 11 pages.

Corrigé du problème

1. (a) Avec les relations coefficients-racines $\begin{cases} a+b=-p \\ ab=q \end{cases}$, on a $\begin{cases} a^2+b^2=p^2-2q \\ (ab)^2=q^2 \end{cases}$ [Q]

   (b) Dire que les zéros de Q sont a^2 et b^2 c'est dire que $Q(X)=(X-a^2)(X-b^2)$.

   Par développement cela équivaut à $\begin{cases} a^2+b^2=a+b \\ (ab)^2=(ab) \end{cases}$ c'est-à-dire à $\begin{cases} p^2+p-2q=0 \\ q^2=q \end{cases}$

   Celà équivaut à $\begin{cases} p^2+p=p(p+1)=0 \\ q=0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} p^2+p-2=(p-1)(p+2)=0 \\ q=1 \end{cases}$

   Pour (p,q), on obtient les quatre solutions $(0,0)$, $(-1,0)$, $(-2,1)$ et $(1,1)$.

   On trouve donc quatre polynômes : $Q=X^2$ (racine double 0), $Q=X^2-X$ (racines 0 et 1), $Q=X^2-2X+1$ (racine double 1) et $Q=X^2+X+1$ (racines j et j^2). [Q]

2. Supposons que $A(X)$ divise $A(X^2)$.

   Il existe donc un polynôme $Q(X)$ (unitaire de degré 2) tel que $A(X^2)=Q(X)A(X)$.

   Si on substitue a et b à X, on trouve $A(a^2)=A(b^2)=0$, donc $\{a^2,b^2\}\subset\{a,b\}$.

   Si $a^2\neq b^2$, ou au contraire si $a=b$, alors l'inclusion précédente est une égalité, et A est l'un des quatre polynômes obtenus en (1c).

   Il reste le cas où $b=-a\neq 0$ qui donne $a^2\in\{a,-a\}$ donc $\{a,b\}=\{-1,1\}$.

   On obtient alors le polynôme $A=(X-1)(X+1)=X^2-1$.

   Réciproquement, on vérifie que les cinq polynômes obtenus conviennent :

   – Si $A(X)=X^2$: $A(X^2)=X^4=Q(X)A(X)$, avec $Q(X)=X^2$.

   – Si $A(X)=X^2-X$: $A(X^2)=X^4-X^2=Q(X)A(X)$, avec $Q(X)=X^2+X$.

   – Si $A(X)=(X-1)^2$: $A(X^2)=(X^2-1)^2=Q(X)A(X)$, avec $Q(X)=(X+1)^2$.

   – Si $A(X)=X^2+X+1$: $A(X^2)=Q(X)A(X)$, avec $Q(X)=X^2-X+1$.

   – Si $A(X)=X^2-1$: $A(X^2)=X^4-1=Q(X)A(X)$, avec $Q(X)=X^2+1$.

   Remarque : dans tous les cas, on constate que $A(X^2)=A(X)A(-X)$.

   Autre méthode :

   La méthode précédente est dans l'esprit de l'énoncé (qui présente A comme le polynôme unitaire de degré 2 ayant pour racines a et b). Il y a cependant une meilleure approche, qui consiste à chercher A sous la forme $A=X^2+pX+q$, et à écrire que la division de $A(X^2)$ par $A(X)$ donne un reste nul.

   On trouve en effet (poser la division, ou demander à Maple) :

   $A(X^2)=Q(X)A(X)+R(X)$, avec $\begin{cases} Q(X)=X^2-pX+p-q+p^2 \\ R(X)=p(2q-p-p^2)X+q(1+q-p-p^2) \end{cases}$

   Ainsi $(A(X)\mid A(X^2))\Leftrightarrow R(X)=0\Leftrightarrow \begin{cases} p=0 \text{ ou } p+p^2=2q \\ q=0 \text{ ou } p+p^2=q+1 \end{cases}$

   cela équivaut à $\begin{cases} p=0 \\ q=0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} p=0 \\ q=-1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} p=-1 \\ q=0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} p=1 \\ q=1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} p=-2 \\ q=1 \end{cases}$

   On retrouve ainsi les cinq polynômes obtenus précédemment (et on note que cette méthode ne nécessite pas de vérification puisqu'on a travaillé par équivalences). [Q]

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 11 pages.

3. (a) Supposons que $B(X)$ divise $B(X^3)$.

Il existe donc un polynôme $Q(X)$ (unitaire de degré 4) tel que $B(X^3) = Q(X)B(X)$.

Si on substitue a et b à X, on trouve $B(a^3) = B(b^3) = 0$, donc $\{a^3, b^3\} \subset \{a, b\}$.

– Premier cas :

Si $a^3 \neq b^3$, ou au contraire si $a = b$, alors $\{a^3, b^3\} = \{a, b\}$.

Mais résoudre $\{a^3, b^3\} = \{a, b\}$, c'est résoudre (S) $\begin{cases} a^3 + b^3 = a + b \\ (ab)^3 = ab \end{cases}$

Posons encore $p = -(a + b)$ et $q = ab$ (donc $B = X^2 + pX + q$).

On note que $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) = -p^3 + 3pq$.

Ainsi $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} p^3 - 3pq = p \\ q^3 = q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 0 \text{ ou } p^2 = 3q + 1 \\ q \in \{-1, 0, 1\} \end{cases}$

Les couples (p, q) solutions forment l'ensemble suivant :

$\{(0, -1), (0, 0), (0, 1), (-i\sqrt{2}, -1), (i\sqrt{2}, -1), (-1, 0), (1, 0), (-2, 1), (2, 1)\}$

Cela donne naissance aux polynômes :

$B_1 = X^2 - 1$ $\quad B_2 = X^2$ $\quad B_3 = X^2 + 1$

$B_4 = X^2 - i\sqrt{2}X - 1$ $\quad B_5 = X^2 + i\sqrt{2}X - 1$ $\quad B_6 = X^2 - X$

$B_7 = X^2 + X$ $\quad B_8 = X^2 - 2X + 1$ $\quad B_9 = X^2 + 2X + 1$

– Deuxième cas :

Il reste le cas ($a^3 = b^3$ et $a \neq b$), c'est-à-dire ($b = ja$ ou $b = j^2a$, avec $a \neq 0$).

L'inclusion $\{a^3, b^3\} \subset \{a, b\}$ s'écrit ici $a^3 \in \{a, b\}$.

On cherche les paires $\{a, b\}$ solutions.

L'égalité $a^3 = a$ (donc $a^2 = 1$) conduit à $\{1, j\}, \{1, j^2\}, \{-1, -j\}, \{-1, -j^2\}$.

Les égalités $a^3 = b = ja$ (donc $a^2 = j$ et $b = ja$) conduisent à $\{-j^2, -1\}, \{j^2, 1\}$.

L'égalité $a^3 = b = j^2a$ (donc $a^2 = j^2$ et $b = j^2a$) conduisent à $\{j, 1\}, \{-j, -1\}$.

Finalement, les paires $\{a, b\}$ obtenues sont : $\{1, j\}, \{1, j^2\}, \{-1, -j\}, \{-1, -j^2\}$.

On trouve ainsi quatre polynômes supplémentaires :

$B_{10} = (X - 1)(X - j) = X^2 + j^2X + j$ $\quad B_{11} = (X - 1)(X - j^2) = X^2 + jX + j^2$

$B_{12} = (X + 1)(X + j) = X^2 - j^2X + j$ $\quad B_{13} = (X + 1)(X + j^2) = X^2 - jX + j^2$

Réciproquement, on vérifie que les 13 polynômes obtenus conviennent.

Pour tout k de $\{1, \ldots, 13\}$, on a effectivement $B_k(X^3) = Q_k(X)B_k(X)$ avec :

$Q_1(X) = X^4 + X^2 + 1$ $\quad Q_2(X) = X^4$ $\quad Q_3(X) = X^4 - X^2 + 1$

$Q_4(X) = X^4 + i\sqrt{2}X^3 - X^2 - i\sqrt{2}X + 1$ $\quad Q_5(X) = X^4 - i\sqrt{2}X^3 - X^2 + i\sqrt{2}X + 1$

$Q_6(X) = X^4 + X^3 + X^2$ $\quad Q_7(X) = X^4 - X^3 + X^2$

$Q_8(X) = X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 2X + 1$ $\quad Q_9(X) = X^4 - 2X^3 + 3X^2 - 2X + 1$

$Q_{10}(X) = X^4 - j^2X^3 - jX + 1$ $\quad Q_{11}(X) = X^4 - jX^3 - j^2X + 1$

$Q_{12}(X) = X^4 + j^2X^3 + jX + 1$ $\quad Q_{13}(X) = X^4 + jX^3 + j^2X + 1$

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 11 pages.

Autre méthode :

Comme dans la question 2, on cherche B sous la forme $B = X^2 + pX + q$, et on écrit que la division de $B(X^3)$ par $B(X)$ donne un reste nul. Mais effectuer cette division "à la main" est plutôt désagréable. Appelons donc Maple à l'aide :

```
> restart: B:=X->X^2+p*X+q: R:=rem(B(X^3),B(X),X,'Q'):
> R:=collect(R,X,factor);
```

$$R := -p\left(-3\,q - 1 + p^2\right)\left(-q + p^2\right)X - q\left(-1 + q^2 - 3\,qp^2 - p^2 + p^4\right)$$

```
> Q:=collect(Q,X,factor);
```

$$Q := X^4 - pX^3 + \left(-q + p^2\right)X^2 - p\left(-1 - 2\,q + p^2\right)X + q^2 - 3\,qp^2 - p^2 + p^4$$

```
> sol:=map(allvalues,solve(coeffs(R,X),p,q));
```

$$\begin{aligned} sol := \ & \{\{q=0,p=0\},\{q=0,p=1\},\{p=-1,q=0\},\{p=0,q=1\},\\ & \{q=-1,p=0\},\{q=1,p=-2\},\{q=1,p=2\},\\ & \{p=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2},q=-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\},\{q=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2},p=-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\},\\ & \{q=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2},p=\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\},\{q=-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2},p=\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\},\\ & \{q=-1,p=i\sqrt{2}\},\{q=-1,p=-i\sqrt{2}\}\} \end{aligned}$$

```
> for s in sol do
    evalc(subs(s,[B(X),Q])) ; collect(%,X) :
    map(sort,%) ; print(['B'=%[1],'Q'=%[2]]) ;
  end do :
```

$[B = X^2, Q = X^4]$

$[B = X^2 + X, Q = X^4 - X^3 + X^2]$

$[B = X^2 - X, Q = X^4 + X^3 + X^2]$

$[B = X^2 + 1, Q = X^4 - X^2 + 1]$

$[B = X^2 - 1, Q = X^4 + X^2 + 1]$

$[B = X^2 - 2\,X + 1, Q = X^4 + 2\,X^3 + 3\,X^2 + 2\,X + 1]$

$[B = X^2 + 2\,X + 1, Q = X^4 - 2\,X^3 + 3\,X^2 - 2\,X + 1]$

$$[B = X^2 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)X - \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}, Q = X^4 + \left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)X^3 + \left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)X + 1]$$

$$[B = X^2 + \left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)X - \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}, Q = X^4 + \left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)X^3 + \left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)X + 1]$$

$$[B = X^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)X - \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}, Q = X^4 + \left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)X^3 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)X + 1]$$

$$[B = X^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)X - \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}, Q = X^4 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)X^3 + \left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)X + 1]$$

$[B = X^2 + i\sqrt{2}X - 1, Q = X^4 - i\sqrt{2}X^3 - X^2 + i\sqrt{2}X + 1]$

$[B = X^2 - i\sqrt{2}X - 1, Q = X^4 + i\sqrt{2}X^3 - X^2 - i\sqrt{2}X + 1]$

[Q]

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 11 pages.