Polynômes de Chebyshev

On définit une suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de la manière suivante :

$$T_0(\mathrm{X}) = 1, \quad T_1(\mathrm{X}) = \mathrm{X}, \quad \text{et } \forall n \in \mathbb{N} : \ T_{n+2}(\mathrm{X}) = 2\mathrm{X}T_{n+1}(\mathrm{X}) - T_n(\mathrm{X})$$

Première partie

1. Calculer T_2, T_3, T_4 et T_5. [S]
2. Montrer que pour tout entier n :
   (a) T_n est de degré n et son terme dominant est $2^{n-1}\mathrm{X}^n$. [S]
   (b) T_n a la parité de n. [S]
   (c) $T_n(1) = 1$. [S]
3. Montrer que : $\forall\,(m,n) \in \mathbb{N}^2$, $m \leq n \Rightarrow 2T_nT_m = T_{n+m} + T_{n-m}$. [S]
4. Prouver que : $\forall\,(m,n) \in \mathbb{N}^2$, $T_m(T_n(\mathrm{X})) = T_{mn}(\mathrm{X})$.
   En déduire un isomorphisme entre $(\mathbb{N}, \times)$ et $\{T_n,\ n \in \mathbb{N}\}$. [S]

Deuxième partie

1. Montrer que : $\forall\,\alpha \in \mathbb{R}$, $\forall\,n \in \mathbb{N}$, $T_n(\cos\alpha) = \cos(n\alpha)$ et $T_n(\cosh\alpha) = \cosh(n\alpha)$. [S]
2. Etablir que, pour tout $n \geq 1$, les zéros de T_n sont réels, distincts deux à deux, qu'ils sont dans $]-1,1[$, et qu'ils sont donnés par $\forall\,k = 0,\ldots,n-1$: $x_k = \cos\left(\dfrac{\pi}{2n} + \dfrac{k\pi}{n}\right)$. [S]
3. (a) Montrer que : $\forall\,\alpha \in]0,\pi[$, $\forall\,n \in \mathbb{N}$, $T_n'(\cos\alpha) = n\dfrac{\sin(n\alpha)}{\sin\alpha}$. [S]
   (b) En déduire les extrémums de T_n (avec $n \geqslant 2$) et en quels points ils sont atteints. [S]
4. Pour $n \geqslant 1$, décomposer la fraction rationnelle $\dfrac{1}{T_n}$ en éléments simples. [S]
5. Montrer que : $\forall\,n \in \mathbb{N}$, $(1-\mathrm{X}^2)T_n'' - \mathrm{X}T_n' + n^2T_n = 0$. [S]

Troisième partie

Dans cette partie, P est un polynôme à coefficients réels de monôme dominant $\lambda\mathrm{X}^n$, avec $n \geq 1$.

1. Montrer que $\sup\{|P(x)|,\ x \in [-1,1]\} \geq \dfrac{|\lambda|}{2^{n-1}}$
   Indication : Raisonner par l'absurde et considérer le polynôme $Q = 2^{n-1}P - \lambda T_n$. [S]
2. Plus généralement, montrer que $\forall\,a,b$: $\sup\{|P(x)|,\ a \leq x \leq b\} \geq \left(\dfrac{b-a}{2}\right)^n \dfrac{|\lambda|}{2^{n-1}}$
   Indication : Utiliser un changement de variable pour se ramener au segment $[-1,1]$. [S]

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.

Corrigé du problème

Première partie

1. On trouve successivement :
$T_2(X) = 2X\,T_1(X) - T_0(X) = 2X^2 - 1$.
$T_3(X) = 2X\,T_2(X) - T_1(X) = 2X(2X^2-1) - X = 4X^3 - 3X$.
$T_4(X) = 2X\,T_3(X) - T_2(X) = 2X(4X^3-3X) - (2X^2-1) = 8X^4 - 8X^2 + 1$.
$T_5(X) = 2X\,T_4(X) - T_3(X) = 2X(8X^4-8X^2+1) - (4X^3-3X) = 16X^5 - 20X^3 + 5X$. [Q]

2. (a) Pour tout entier $n \geqslant 1$, on va montrer la propriété suivante :
$\mathcal{P}(n)$: "Il existe U_n dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $T_n(X) = 2^{n-1}X^n + U_n(X)$".
La propriété est vraie si $n = 1$ et $n = 2$, avec $U_1 = 0$ et $U_2 = -1$.
On se donne maintenant $n \geqslant 1$ et on suppose que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies.
Dans ces conditions :
$$\begin{aligned} T_{n+2}(X) &= 2X\,T_{n+1}(X) - T_n(X) = 2X(2^nX^{n+1} + U_{n+1}(X)) - 2^{n-1}X^n - U_n(X) \\ &= 2^{n+1}X^{n+2} + U_{n+2}(X) \text{ avec } U_{n+2}(X) = 2X\,U_{n+1}(X) - 2^{n-1}X^n - U_n(X) \end{aligned}$$
Puisque $\deg(U_n) \leqslant n-1$ $\deg(U_{n+1}) \leqslant n$, U_{n+2} est bien dans $\mathbb{R}_{n+1}[X]$.
Cela montre la propriété au rang $n+2$ et achève la récurrence.
Ainsi, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, T_n est de degré n et de terme dominant $2^{n-1}X^n$. [Q]

(b) Il suffit de prouver, pour tout n de $\mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(n) : T_n(-X) = (-1)^n T_n(X)$.
Elle est vraie si $n = 0$ (car T_0 est pair) et si $n = 1$ (car T_1 est impair).
On se donne $n \geqslant 0$ et on suppose que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies.
On en déduit :
$$\begin{aligned} T_{n+2}(-X) &= 2(-X)T_{n+1}(-X) - T_n(-X) = 2(-X)(-1)^{n+1}T_{n+1}(X) - (-1)^nT_n(X) \\ &= (-1)^{n+2}(2X\,T_{n+1}(X) - T_n(X)) = (-1)^{n+2}T_{n+2}(X) \end{aligned}$$
Cela montre la propriété au rang $n+2$ et achève la récurrence.
Ainsi, pour tout n de $\mathbb{N}$, le polynôme T_n a la parité de n. [Q]

(c) La relation $T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X)$ donne $T_{n+2}(1) = 2T_{n+1}(1) - T_n(1)$.
Or $T_0(1) = T_1(1) = 1$. Une récurrence évidente donne alors : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ T_n(1) = 1$. [Q]

3. On note $\mathcal{P}(m)$ la propriété : "$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq m \Rightarrow 2T_nT_m = T_{n+m} + T_{n-m}$".
On va montrer la propriété $\mathcal{P}(m)$ par récurrence sur $m \geqslant 0$.
La propriété $\mathcal{P}(0)$ est évidente (car $T_0 = 1$), et la propriété $\mathcal{P}(1)$ n'est autre que la relation connue entre les polynômes T_{n-1}, T_n et T_{n+1} (car $T_1 = X$).
On se donne $m \geqslant 0$ et on suppose que $\mathcal{P}(m)$ et $\mathcal{P}(m+1)$ sont vraies.
On a donc les égalités $\begin{cases} (E_0) : 2T_nT_m = T_{n+m} + T_{n-m} \\ (E_1) : 2T_nT_{m+1} = T_{n+m+1} + T_{n-m-1} \end{cases}$ valables pour $n \geqslant m+2$.
On forme alors $2X(E_1) - (E_0)$ et on obtient :
$2T_n(2X\,T_{m+1} - T_m) = (2X\,T_{n+m+1} - T_{n+m}) + (2X\,T_{n-m-1} - T_{n-m})$, c'est-à-dire
$2T_nT_{m+2} = T_{n+m+2} + T_{n-(m+2)}$, ce qui prouve $\mathcal{P}(m+2)$ et achève la récurrence. [Q]

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.