



Une méthode de calcul de la somme des $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

Pour tout entier naturel n , on définit le polynôme $Q_n = \frac{1}{2i}((X+i)^{n+1} - (X-i)^{n+1})$.

- Déterminer le degré de Q_n . [S]
 - Montrer que : $\forall r \in \mathbb{N}, Q_{2r} = \sum_{p=0}^r (-1)^p C_{2r+1}^{2p+1} X^{2r-2p}$. [S]
- Déterminer les racines de Q_n . Montrer que ces racines sont réelles. [S]
 - En déduire la décomposition de Q_n en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$. [S]
 - Prouver que : $\forall r \in \mathbb{N}, Q_{2r} = (2r+1) \prod_{k=1}^r \left(X^2 - \cotan^2 \frac{k\pi}{2r+1} \right)$. [S]
 - En déduire $\sum_{k=1}^r \cotan^2 \frac{k\pi}{2r+1} = \frac{r(2r-1)}{3}$, puis $\sum_{k=1}^r \frac{1}{\sin^2 \frac{k\pi}{2r+1}} = \frac{2r(r+1)}{3}$. [S]
- Montrer que : $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\cotan^2 x < \frac{1}{x^2} < \frac{1}{\sin^2 x}$. [S]
 - En déduire un encadrement de $\sum_{k=1}^r \frac{1}{\left(\frac{k\pi}{2r+1}\right)^2}$, puis la valeur de $\lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^r \frac{1}{k^2}$. [S]