

Fractions continues

Notations

- On notera $E(x)$ la partie entière de tout réel x .
- On désigne par \mathcal{S} l'ensemble des suites $(a_n)_{n \geq 1}$ de \mathbb{R} telles que $a_n > 0$ pour tout $n \geq 2$.
Pour toute suite $(a_n)_{n \geq 1}$ appartenant à \mathcal{S} on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, [a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n] = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}} \quad (1)$$

En particulier :

$$[a_1] = a_1, [a_1, a_2] = a_1 + \frac{1}{a_2}, [a_1, a_2, a_3] = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3}}$$

Il est clair que si a_1, a_2, \dots, a_n sont rationnels, alors $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ est rationnel.

- Les identités suivantes découlent immédiatement de la définition :

$$\forall n \geq 2, [a_1, a_2, \dots, a_n] = a_1 + \frac{1}{[a_2, \dots, a_n]} \quad (2)$$

$$\forall n \geq 2, [a_1, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n] = \left[a_1, \dots, a_{n-2}, a_{n-1} + \frac{1}{a_n} \right] \quad (3)$$

- On observe que si $a_n > 1$, l'égalité $a_n = (a_n - 1) + \frac{1}{1}$ permet d'écrire :

$$[a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n] = [a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n - 1, 1] \quad (4)$$

- A toute suite $(a_n)_{n \geq 1}$ de \mathbb{R} , on associe les suites (p_n) et (q_n) définies par :

$$\begin{cases} p_{-1} = 0 \\ q_{-1} = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} p_0 = 1 \\ q_0 = 0 \end{cases}, \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1 \quad \begin{cases} p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \\ q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \end{cases} \quad (5)$$

En particulier : $\begin{cases} p_1 = a_1 \\ q_1 = 1 \end{cases}$ et $\begin{cases} p_2 = a_2 a_1 + 1 \\ q_2 = a_2 > 0 \end{cases}$

Une récurrence évidente de pas 2 montre que pour tout $n \geq 1$, on a $q_n > 0$.

Partie I

Dans cette partie, $(a_n)_{n \geq 1}$ désigne un élément quelconque de \mathcal{S} .

Les relations (5) permettent de lui associer les suites (p_n) et (q_n) .

1. Dans cette question, on va prouver la relation suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, [a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n] = \frac{p_n}{q_n} \quad (6)$$

(a) Vérifier que la relation (6) est vérifiée pour les indices $n = 1, 2, 3$. [S]

(b) On fixe un indice $n \geq 1$ et on définit la suite (a') par :

$$\forall k \neq n, a'_k = a_k \quad \text{et} \quad a'_n = a_n + \frac{1}{a_{n+1}}$$

Comme dans les égalités (5), on associe à la suite (a') les suites (p') et (q') .

Montrer l'égalité $\frac{p'_n}{q'_n} = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$. [S]

(c) Montrer que l'égalité (6) est vraie pour tout entier $n \geq 1$. [S]

2. Etablir les relations suivantes :

(a) Pour tout entier $n \geq 0$, $p_{n+1}q_n - q_{n+1}p_n = (-1)^{n+1}$ [S]

(b) Pour tout entier $n \geq 1$,

$$[a_1, \dots, a_n, a_{n+1}] = [a_1, \dots, a_n] + \frac{(-1)^{n+1}}{q_n q_{n+1}} \quad (7)$$

[S]

(c) Pour tout entier $n \geq 2$,

$$[a_1, \dots, a_n] = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{q_k q_{k+1}} \quad (8)$$

[S]

3. Dans cette question, n est un entier ≥ 2 et t est un réel > 0 .

(a) Par un raisonnement analogue à celui de la question I.1.b, montrer l'égalité :

$$[a_1, \dots, a_n, t] = \frac{tp_n + p_{n-1}}{tq_n + q_{n-1}} \quad (9)$$

[S]

(b) En déduire les deux égalités :

$$[a_1, \dots, a_n, t] - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^{n+1}}{q_n(tq_n + q_{n-1})} \quad (10)$$

$$[a_1, \dots, a_n, t] - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{(-1)^n t}{q_{n-1}(tq_n + q_{n-1})} \quad (11)$$

[S]

Partie II

Dans cette partie, la suite (a_n) est à valeurs entières.

Plus précisément : $a_1 \in \mathbb{Z}$ et $\forall n \geq 2, a_n \in \mathbb{N}^*$.

A la suite (a_n) on associe comme précédemment les suites (p_n) et (q_n) .

Pour simplifier les notations, on pourra poser : $\forall n \geq 1, r_n = [a_1, \dots, a_{n-1}, a_n]$.

On rappelle que $\forall n \geq 1, r_n = \frac{p_n}{q_n}$.

1. (a) Montrer que $(p_n)_{n \geq 1}$ est une suite de \mathbb{Z} .
 Prouver que $(q_n)_{n \geq 1}$ est une suite de \mathbb{N}^* , strictement croissante à partir de $n = 2$.
 Qu'en déduit-on concernant $\lim_{n \rightarrow +\infty} q_n$? [S]
- (b) Pour tout n de \mathbb{N}^* , montrer que p_n et q_n sont premiers entre eux. [S]
2. Dans cette question, on montre que la suite (r_n) est convergente vers un irrationnel.
 - (a) Montrer que la suite de terme général r_{2n} est strictement décroissante et que la suite de terme général r_{2n-1} est strictement croissante (utiliser I.2.b). [S]
 - (b) Montrer alors que la suite (r_n) est convergente. On pose $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n$. [S]
 - (c) Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a : $0 < \left| \ell - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{a_{n+1}q_n^2} \leq \frac{1}{q_n^2}$. [S]
 - (d) En déduire que ℓ est un nombre irrationnel [S]

Partie III

Soit x un nombre réel. On pose $x_1 = x$ et on note $a_1 = E(x_1)$ sa partie entière.

– Si x_1 est un entier, c'est-à-dire si $x_1 = a_1$, on arrête là...

– Sinon, c'est-à-dire si $0 < x_1 - a_1 < 1$, on pose : $x_2 = \frac{1}{x_1 - a_1} > 1$.

On a donc : $x_1 = a_1 + \frac{1}{x_2} = [a_1, x_2]$. On pose alors $a_2 = E(x_2) \geq 1$.

– Si x_2 est un entier, c'est-à-dire si $a_2 = x_2$, on arrête là... On a alors $x_1 = [a_1, a_2]$.

– Sinon, c'est-à-dire si $0 < x_2 - a_2 < 1$, on pose : $x_3 = \frac{1}{x_2 - a_2} > 1$.

On a donc : $x_2 = a_2 + \frac{1}{x_3} = [a_2, x_3]$ et $x_1 = a_1 + \frac{1}{x_2} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{x_3}} = [a_1, a_2, x_3]$.

On note alors $a_3 = E(x_3) \geq 1$ la partie entière de x_3 .

On construit donc successivement $x_1, a_1, x_2, a_2, \dots, x_n, a_n, \dots$ de la manière suivante :

– $x_1 = x$ et $a_1 = E(x_1)$ (a_1 est un élément de \mathbb{Z}).

– Soit n dans \mathbb{N}^* . Si x_n existe, on a $x = [a_1, \dots, a_{n-1}, x_n]$ et on pose $a_n = E(x_n)$.

Si x_n est un entier ($a_n = x_n$) on arrête là... On a alors $x = [a_1, \dots, a_{n-1}, a_n]$.

Sinon, on pose $x_{n+1} = \frac{1}{x_n - a_n} > 1$ et $a_{n+1} = E(x_{n+1}) \in \mathbb{N}^*$.

Avec cette définition, on a bien : $x = \left[a_1, \dots, a_{n-1}, a_n + \frac{1}{x_{n+1}} \right] = [a_1, \dots, a_{n-1}, a_n, x_{n+1}]$

Le procédé décrit ci-dessus est appelé *développement du réel x en fraction continue* (on pourra abrégé cette expression et parler simplement du développement du réel x .)

On notera bien que ce développement peut être *fini* ou *infini*.

On pose $r_n = [a_1, \dots, a_{n-1}, a_n]$. On dit que r_n est la n -ième *réduite* du réel x .

On dit également que a_1, a_2, \dots, a_n sont les *quotients partiels* successifs de ce développement.

On définit les suites (p_n) et (q_n) comme indiqué dans les égalités (5).

Il est clair que p_n, q_n, r_n sont définis $\Leftrightarrow a_n$ existe. D'après (6), on a toujours $r_n = \frac{p_n}{q_n}$.

1. On va montrer que le développement de x est fini si et seulement si x est rationnel.

(a) Montrer que si le développement de x est fini, alors x est rationnel. [S]

(b) Réciproquement, on suppose que $x = \frac{m}{d}$, où m est dans \mathbb{Z} , d dans \mathbb{N}^* .

Montrer que le développement de x est fini et que les entiers a_k sont les quotients successifs dans l'algorithme d'Euclide appliqué au couple (m, d) . [S]

2. Dans cette question, on calcule les développements de deux nombres rationnels.

(a) Calculer les réduites r_n et les quotients partiels a_n du développement de $x = \frac{256}{117}$. [S]

(b) On définit la suite de Fibonacci par $F_0 = F_1 = 1$ et $\forall n \geq 2, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

Calculer les quotients partiels a_n dans le développement de $x = \frac{F_{15}}{F_{14}}$. [S]

3. Dans cette question, on établit quelques résultats portant sur la qualité de l'approximation d'un réel x par ses réduites successives. Ces résultats supposent bien sûr l'existence des coefficients a_n, x_n, p_n, q_n, r_n invoqués (ce qui ne pose pas de problème si x est irrationnel car son développement est alors infini.)

(a) En utilisant I.3.b montrer que $x - r_n = \frac{(-1)^{n+1}}{q_n(x_{n+1}q_n + q_{n-1})}$.

En déduire que si x est irrationnel : $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = x$. [S]

(b) Avec $n \geq 3$ et en utilisant à nouveau I.3.b, montrer que $|x - r_n| < |x - r_{n-1}|$. [S]

(c) En utilisant $a_{n+1} \leq x_{n+1} < a_{n+1} + 1$ montrer que $\frac{1}{q_{n+1}q_{n+2}} < \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{1}{q_n q_{n+1}}$.

En déduire à nouveau l'inégalité $|x - r_{n+1}| < |x - r_n|$. [S]

- (d) Dans cette question, on va montrer le résultat suivant, qui prouve que chaque réduite r_n de x est la meilleure approximation de x parmi tous les nombres rationnels dont le dénominateur est inférieur ou égal à q_n .

Proposition : Soit $r = \frac{m}{d}$ un rationnel tel que $1 \leq d \leq q_n$. Alors $\left| x - \frac{m}{d} \right| \geq \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right|$.

- ◇ Montrer que r ne peut pas être strictement compris entre r_n et r_{n-1} .
- ◇ Conclure.

[S]

Partie IV

Dans toute la suite, (a_n) est une suite d'entiers, avec $a_1 \in \mathbb{Z}$ et $\forall n \geq 2, a_n \in \mathbb{N}^*$.

On conserve les notations de la partie II (suites (p_n) , (q_n) , (r_n)).

S'il n'y a aucune ambiguïté sur la suite (a_n) , on notera par exemple $[a_1, a_2, a_3, a_4, \dots]$ pour désigner la limite de $r_n = [a_1, a_2, a_3, \dots, a_n]$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Par exemple $x = [1, 2, 3, 4, \dots]$ est l'irrationnel de restes partiels $a_n = 1$ pour tout $n \geq 1$.

Si les restes partiels a_k de $x = [a_1, a_2, \dots, a_p, a_{p+1}, \dots, a_{p+T}, a_{p+1}, \dots, a_{p+T}, \dots]$ forment une suite périodique à partir d'un certain rang (sur cet exemple à partir du rang $p+1$, avec une période T) on notera $x = [a_1, a_2, \dots, a_p, \overline{a_{p+1}, a_{p+2}, \dots, a_{p+T}}]$.

Par exemple $[1, 4, \overline{3, 2, 5}]$ désigne le développement illimité $[1, 4, 3, 2, 5, 3, 2, 5, 3, 2, 5, \dots]$

1. Dans cette question on calcule le début du développement de π et de e , avec la précision permise par une calculatrice.
 - (a) Avec $\pi \approx 3,14159265359$ trouver les six premières réduites de π . [S]
 - (b) Calculer les six premières réduites de $e \approx 2,71828182846$ [S]
2. On vérifie ici quelques propriétés des développements en fraction continue illimitée.

(a) Montrer que $[a_1, a_2, a_3, a_4, \dots] = a_1 + \frac{1}{[a_2, a_3, a_4, a_5, \dots]}$ [S]

(b) Soit $x = [a_1, a_2, a_3, a_4, \dots]$ le développement en fraction continue d'un irrationnel, comme obtenu dans la partie III.

Soit $(b_n)_{n \geq 1}$ une suite d'entiers, avec $b_n > 0$ pour tout $n \geq 1$.

On suppose que $[b_1, b_2, b_3, b_4, \dots] = x$ (au sens de la partie II).

Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a $b_n = a_n$ (ce résultat signifie que tout irrationnel possède un *unique* développement en fraction continue illimitée.) [S]

(c) Pour tout entier $n \geq 1$, prouver l'égalité :

$$[a_1, \dots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots] = \frac{[a_{n+1}, a_{n+2}, \dots]p_n + p_{n-1}}{[a_{n+1}, a_{n+2}, \dots]q_n + q_{n-1}}$$

[S]

3. Dans cette question, on calcule certains développements périodiques simples.

(a) Calculer le développement du nombre d'or $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. [S]

(b) Calculer le développement de $\sqrt{2}$. [S]

(c) Montrer que $\sqrt{7} = [2, \overline{1, 1, 1, 4}]$. [S]

4. Pour tout m de \mathbb{N}^* , montrer qu'on a les développements suivants :

(a) $[m, \overline{2m}] = \sqrt{m^2 + 1}$ [S]

(b) $[m, \overline{m, 2m}] = \sqrt{m^2 + 2}$ [S]

(c) $[m, \overline{2, 2m}] = \sqrt{m^2 + m}$ [S]

Partie V

Les exemples précédents ont montré quelques développements périodiques.

On va maintenant considérer les irrationnels dont le développement en fraction continue est périodique à partir d'un certain rang. On dit qu'un irrationnel x est *quadratique* s'il peut s'écrire $x = r + s\sqrt{\delta}$, où r et s sont rationnels et où δ est un entier > 0 .

1. Montrer qu'un irrationnel x est quadratique si et seulement s'il est solution d'une équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$, avec $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^2$. [S]

2. Soit x un irrationnel. On suppose que le développement de x est périodique.

Autrement dit, il existe un entier $n \geq 1$ tel que :

$$x = [a_1, a_2, \dots, a_n, a_1, a_2, \dots, a_n, a_1, \dots] = [\overline{a_1, a_2, \dots, a_n}]$$

Montrer que x est quadratique. [S]

3. Montrer que le résultat précédent est encore vrai si le développement de x est périodique à partir d'un certain rang c'est-à-dire si x s'écrit :

$$x = [a_1, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+T}, a_{n+1}, \dots] = [a_1, \dots, a_n, \overline{a_{n+1}, \dots, a_{n+T}}]$$

[S]

4. Calculer $x = [3, 2, \overline{3, 5, 1}]$. [S]

5. On démontre (ce sera pour une prochaine fois...) la réciproque du résultat obtenu dans les questions V.2 et V.3 : un irrationnel est donc quadratique *si et seulement si* son développement en fraction continue est périodique au moins à partir d'un certain rang. Cette caractérisation est un théorème de Lagrange (1798).