Fractions continues

Notations

– On notera $\mathrm{E}(x)$ la partie entière de tout réel x.

– On désigne par $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites $(a_n)_{n\geq 1}$ de $\mathbb{R}$ telles que $a_n > 0$ pour tout $n \geq 2$.
Pour toute suite $(a_n)_{n\geq 1}$ appartenant à $\mathcal{S}$ on pose :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ [\, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n\,] \ = \ a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}} \tag{1}$$

En particulier :
$[\, a_1\,] = a_1,\ [\, a_1, a_2\,] = a_1 + \dfrac{1}{a_2},\ [\, a_1, a_2, a_3\,] = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}}$

Il est clair que si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont rationnels, alors $[\, a_1, a_2, \ldots, a_n\,]$ est rationnel.

– Les identités suivantes découlent immédiatement de la définition :

$$\forall\, n \geq 2,\ [\, a_1, a_2, \ldots, a_n\,] \ = \ a_1 + \frac{1}{[\, a_2, \ldots, a_n\,]} \tag{2}$$

$$\forall\, n \geq 2,\ [\, a_1, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n\,] \ = \ \left[\, a_1, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1} + \frac{1}{a_n}\,\right] \tag{3}$$

– On observe que si $a_n > 1$, l'égalité $a_n = (a_n - 1) + \dfrac{1}{1}$ permet d'écrire :

$$[\, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n\,] = [\, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n - 1, 1\,] \tag{4}$$

– A toute suite $(a_n)_{n\geq 1}$ de $\mathbb{R}$, on associe les suites (p_n) et (q_n) définies par :

$$\begin{cases} p_{-1} = 0 \\ q_{-1} = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} p_0 = 1 \\ q_0 = 0 \end{cases}, \quad \text{et} \quad \forall\, n \geq 1 \begin{cases} p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \\ q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \end{cases} \tag{5}$$

En particulier : $\begin{cases} p_1 = a_1 \\ q_1 = 1 \end{cases}$ et $\begin{cases} p_2 = a_2 a_1 + 1 \\ q_2 = a_2 > 0 \end{cases}$
Une récurrence évidente de pas 2 montre que pour tout $n \geq 1$, on a $q_n > 0$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 16 pages.

Partie I

Dans cette partie, $(a_n)_{n\geq 1}$ désigne un élément quelconque de $\mathcal{S}$.
Les relations (5) permettent de lui associer les suites (p_n) et (q_n).

1. Dans cette question, on va prouver la relation suivante :
$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ [\, a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_{n-1},\, a_n\,] = \frac{p_n}{q_n} \tag{6}$$
   (a) Vérifier que la relation (6) est vérifiée pour les indices $n = 1, 2, 3$. [S]
   (b) On fixe un indice $n \geq 1$ et on définit la suite (a') par :
$$\forall\, k \neq n,\ a'_k = a_k \qquad \text{et} \qquad a'_n = a_n + \frac{1}{a_{n+1}}$$
   Comme dans les égalités (5), on associe à la suite (a') les suites (p') et (q').
   Montrer l'égalité $\dfrac{p'_n}{q'_n} = \dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$. [S]
   (c) Montrer que l'égalité (6) est vraie pour tout entier $n \geq 1$. [S]
2. Etablir les relations suivantes :
   (a) Pour tout entier $n \geq 0$, $p_{n+1}q_n - q_{n+1}p_n = (-1)^{n+1}$ [S]
   (b) Pour tout entier $n \geq 1$,
$$[\, a_1,\, \ldots,\, a_n,\, a_{n+1}\,] = [\, a_1,\, \ldots,\, a_n\,] + \frac{(-1)^{n+1}}{q_n\, q_{n+1}} \tag{7}$$
   [S]
   (c) Pour tout entier $n \geq 2$,
$$[\, a_1,\, \ldots,\, a_n] = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{q_k\, q_{k+1}} \tag{8}$$
   [S]
3. Dans cette question, n est un entier ≥ 2 et t est un réel > 0.
   (a) Par un raisonnement analogue à celui de la question I.1.b, montrer l'égalité :
$$[\, a_1,\, \ldots,\, a_n,\, t\,] = \frac{tp_n + p_{n-1}}{tq_n + q_{n-1}} \tag{9}$$
   [S]
   (b) En déduire les deux égalités :
$$[\, a_1,\, \ldots,\, a_n,\, t\,] - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^{n+1}}{q_n(tq_n + q_{n-1})} \tag{10}$$
$$[\, a_1,\, \ldots,\, a_n,\, t\,] - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{(-1)^n t}{q_{n-1}(tq_n + q_{n-1})} \tag{11}$$
   [S]

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 16 pages.

Partie II

Dans cette partie, la suite (a_n) est à valeurs entières.

Plus précisément : $a_1 \in \mathbb{Z}$ et $\forall\, n \geq 2,\ a_n \in \mathbb{N}^*$.

A la suite (a_n) on associe comme précédemment les suites (p_n) et (q_n).

Pour simplifier les notations, on pourra poser : $\forall\, n \geq 1,\ r_n = [\, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n\,]$.

On rappelle que $\forall\, n \geq 1,\ r_n = \dfrac{p_n}{q_n}$.

1. (a) Montrer que $(p_n)_{n\geq 1}$ est une suite de $\mathbb{Z}$.
   Prouver que $(q_n)_{n\geq 1}$ est une suite de $\mathbb{N}^*$, strictement croissante à partir de $n = 2$.
   Qu'en déduit-on concernant $\lim\limits_{n\to+\infty} q_n$? [S]

   (b) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, montrer que p_n et q_n sont premiers entre eux. [S]

2. Dans cette question, on montre que la suite (r_n) est convergente vers un irrationnel.

   (a) Montrer que la suite de terme général r_{2n} est strictement décroissante et que la suite de terme général r_{2n-1} est strictement croissante (utiliser I.2.b). [S]

   (b) Montrer alors que la suite (r_n) est convergente. On pose $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} r_n$. [S]

   (c) Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a : $0 < \left|\ell - \dfrac{p_n}{q_n}\right| < \dfrac{1}{a_{n+1}q_n^2} \leq \dfrac{1}{q_n^2}$. [S]

   (d) En déduire que ℓ est un nombre irrationnel [S]

Partie III

Soit x un nombre réel. On pose $x_1 = x$ et on note $a_1 = \mathrm{E}(x_1)$ sa partie entière.

– Si x_1 est un entier, c'est-à-dire si $x_1 = a_1$, on arrête là...

– Sinon, c'est-à-dire si $0 < x_1 - a_1 < 1$, on pose : $x_2 = \dfrac{1}{x_1 - a_1} > 1$.
On a donc : $x_1 = a_1 + \dfrac{1}{x_2} = [a_1, x_2]$. On pose alors $a_2 = \mathrm{E}(x_2) \geq 1$.

– Si x_2 est un entier, c'est-à-dire si $a_2 = x_2$, on arrête là... On a alors $x_1 = [a_1, a_2]$.

– Sinon, c'est-à-dire si $0 < x_2 - a_2 < 1$, on pose : $x_3 = \dfrac{1}{x_2 - a_2} > 1$.
On a donc : $x_2 = a_2 + \dfrac{1}{x_3} = [a_2, x_3]$ et $x_1 = a_1 + \dfrac{1}{x_2} = a_1 + \dfrac{1}{a_2 + \dfrac{1}{x_3}} = [a_1, a_2, x_3]$.
On note alors $a_3 = \mathrm{E}(x_3) \geq 1$ la partie entière de x_3.

On construit donc successivement $x_1, a_1, x_2, a_2, \ldots, x_n, a_n, \ldots$ de la manière suivante :
– $x_1 = x$ et $a_1 = \mathrm{E}(x_1)$ (a_1 est un élément de $\mathbb{Z}$).

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 16 pages.

– Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Si x_n existe, on a $x = [\, a_1, \ldots, a_{n-1}, x_n \,]$ et on pose $a_n = \mathrm{E}(x_n)$.
Si x_n est un entier ($a_n = x_n$) on arrête là... On a alors $x = [\, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n \,]$.
Sinon, on pose $x_{n+1} = \dfrac{1}{x_n - a_n} > 1$ et $a_{n+1} = \mathrm{E}(x_{n+1}) \in \mathbb{N}^*$.
Avec cette définition, on a bien : $x = \left[\, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n + \dfrac{1}{x_{n+1}} \,\right] = [\, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n, x_{n+1} \,]$

Le procédé décrit ci-dessus est appelé *développement du réel x en fraction continue* (on pourra abréger cette expression et parler simplement du développement du réel x.)

On notera bien que ce développement peut être *fini* ou *infini*.

On pose $r_n = [\, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n \,]$. On dit que r_n est la n-ième *réduite* du réel x.

On dit également que $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont les *quotients partiels* successifs de ce développement.

On définit les suites (p_n) et (q_n) comme indiqué dans les égalités (5).

Il est clair que p_n, q_n, r_n sont définis $\Leftrightarrow$ a_n existe. D'après (6), on a toujours $r_n = \dfrac{p_n}{q_n}$.

1. On va montrer que le développement de x est fini si et seulement si x est rationnel.
   (a) Montrer que si le développement de x est fini, alors x est rationnel. [S]
   (b) Réciproquement, on suppose que $x = \dfrac{m}{d}$, où m est dans $\mathbb{Z}$, d dans $\mathbb{N}^*$.
   Montrer que le développement de x est fini et que les entiers a_k sont les quotients successifs dans l'algorithme d'Euclide appliqué au couple (m, d). [S]
2. Dans cette question, on calcule les développements de deux nombres rationnels.
   (a) Calculer les réduites r_n et les quotients partiels a_n du développement de $x = \dfrac{256}{117}$. [S]
   (b) On définit la suite de Fibonacci par $F_0 = F_1 = 1$ et $\forall\, n \geq 2,\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.
   Calculer les quotients partiels a_n dans le développement de $x = \dfrac{F_{15}}{F_{14}}$. [S]
3. Dans cette question, on établit quelques résultats portant sur la qualité de l'approximation d'un réel x par ses réduites successives. Ces résultats supposent bien sûr l'existence des coefficients a_n, x_n, p_n, q_n, r_n invoqués (ce qui ne pose pas de problème si x est irrationnel car son développement est alors infini.)
   (a) En utilisant I.3.b montrer que $x - r_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{q_n(x_{n+1}q_n + q_{n-1})}$.
   En déduire que si x est irrationnel : $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = x$. [S]
   (b) Avec $n \geq 3$ et en utilisant à nouveau I.3.b, montrer que $|x - r_n| < |x - r_{n-1}|$. [S]
   (c) En utilisant $a_{n+1} \leq x_{n+1} < a_{n+1} + 1$ montrer que $\dfrac{1}{q_{n+1}q_{n+2}} < \left|x - \dfrac{p_n}{q_n}\right| \leq \dfrac{1}{q_n q_{n+1}}$.
   En déduire à nouveau l'inégalité $|x - r_{n+1}| < |x - r_n|$. [S]

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 16 pages.

(d) Dans cette question, on va montrer le résultat suivant, qui prouve que chaque réduite r_n de x est la meilleure approximation de x parmi tous les nombres rationnels dont le dénominateur est inférieur ou égal à q_n.

Proposition : *Soit* $r = \dfrac{m}{d}$ *un rationnel tel que* $1 \leq d \leq q_n$. *Alors* $\left|x - \dfrac{m}{d}\right| \geq \left|x - \dfrac{p_n}{q_n}\right|$.

◇ Montrer que r ne peut pas être strictement compris entre r_n et r_{n-1}.

◇ Conclure.

[S]

Partie IV

Dans toute la suite, (a_n) est une suite d'entiers, avec $a_1 \in \mathbb{Z}$ et $\forall\, n \geq 2,\ a_n \in \mathbb{N}^*$.

On conserve les notations de la partie II (suites (p_n), (q_n), (r_n)).

S'il n'y a aucune ambiguité sur la suite (a_n), on notera par exemple $[\, a_1,\, a_2,\, a_3, a_4,\, \ldots\,]$ pour désigner la limite de $r_n = [\, a_1,\, a_2,\, a_3, \ldots,\, a_n\,]$ quand $n \to +\infty$.

Par exemple $x = [\, 1,\, 2,\, 3,\, 4\, \ldots\,]$ est l'irrationnel de restes partiels $a_n = 1$ pour tout $n \geq 1$.

Si les restes partiels a_k de $x = [\, a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_p,\, a_{p+1}, \ldots,\, a_{p+T},\, a_{p+1}, \ldots, a_{p+T},\, \ldots\,]$ forment une suite périodique à partir d'un certain rang (sur cet exemple à partir du rang $p+1$, avec une période T) on notera $x = [\, a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_p,\, \overline{a_{p+1},\, a_{p+2}, \ldots,\, a_{p+T}}\,]$.

Par exemple $[\, 1,\, 4,\, \overline{3,\, 2,\, 5}\,]$ désigne le développement illimité $[\, 1,\, 4,\, 3,\, 2,\, 5,\, 3,\, 2,\, 5,\, 3,\, 2,\, 5, \ldots\,]$

1. Dans cette question on calcule le début du développement de π et de e, avec la précision permise par une calculatrice.
   (a) Avec $\pi \approx 3,14159265359$ trouver les six premières réduites de π. [S]
   (b) Calculer les six premières réduites de e $\approx 2,71828182846$ [S]

2. On vérifie ici quelques propriétés des développements en fraction continue illimitée.
   (a) Montrer que $[\, a_1,\, a_2,\, a_3, a_4,\, \ldots\,] = a_1 + \dfrac{1}{[\, a_2,\, a_3, a_4,\, a_5,\, \ldots\,]}$ [S]

   (b) Soit $x = [\, a_1,\, a_2,\, a_3, a_4,\, \ldots\,]$ le développement en fraction continue d'un irrationnel, comme obtenu dans la partie III.

   Soit $(b_n)_{n\geq 1}$ une suite d'entiers, avec $b_n > 0$ pour tout $n \geq 1$.

   On suppose que $[\, b_1,\, b_2,\, b_3, b_4,\, \ldots\,] = x$ (au sens de la partie II).

   Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a $b_n = a_n$ (ce résultat signifie que tout irrationnel possède un *unique* développement en fraction continue illimitée.) [S]

   (c) Pour tout entier $n \geq 1$, prouver l'égalité :

$$[\, a_1,\, \ldots,\, a_{n-1},\, a_n,\, a_{n+1},\, a_{n+2},\, \ldots\,] = \frac{[\, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\,]p_n + p_{n-1}}{[\, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\,]q_n + q_{n-1}}$$

   [S]

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 16 pages.

3. Dans cette question, on calcule certains développements périodiques simples.
   (a) Calculer le développement du nombre d'or $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. [S]
   (b) Calculer le développement de $\sqrt{2}$. [S]
   (c) Montrer que $\sqrt{7} = [\,2,\,\overline{1,\,1,\,1,\,4}\,]$. [S]
4. Pour tout m de $\mathbb{N}^*$, montrer qu'on a les développements suivants :
   (a) $[\,m,\,\overline{2m}\,] = \sqrt{m^2+1}$ [S]
   (b) $[\,m,\,\overline{m,\,2m}\,] = \sqrt{m^2+2}$ [S]
   (c) $[\,m,\,\overline{2,\,2m}\,] = \sqrt{m^2+m}$ [S]

Partie V

Les exemples précédents ont montré quelques développements périodiques.

On va maintenant considérer les irrationnels dont le développement en fraction continue est périodique à partir d'un certain rang. On dit qu'un irrationnel x est *quadratique* s'il peut s'écrire $x = r + s\sqrt{\delta}$, où r et s sont rationnels et où δ est un entier > 0.

1. Montrer qu'un irrationnel x est quadratique si et seulement s'il est solution d'une équation du second degré $ax^2+bx+c=0$, avec $(a,b,c) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^2$. [S]
2. Soit x un irrationnel. On suppose que le développement de x est périodique.

   Autrement dit, il existe un entier $n \geq 1$ tel que :

   $$x = [\,a_1,\,a_2,\,\ldots,a_n,\,a_1,\,a_2,\,\ldots,\,a_n,\,a_1,\,\ldots\,] = [\,\overline{a_1,\,a_2,\,\ldots,a_n}\,]$$

   Montrer que x est quadratique. [S]
3. Montrer que le résultat précédent est encore vrai si le développement de x est périodique *à partir d'un certain rang* c'est-à-dire si x s'écrit :

   $$x = [\,a_1,\,\ldots,a_n,\,a_{n+1},\,\ldots,\,a_{n+T},\,a_{n+1},\,\ldots\,] = [\,a_1,\,\ldots,a_n,\,\overline{a_{n+1},\,\ldots,a_{n+T}}\,]$$

   [S]
4. Calculer $x = [\,3,\,2,\,\overline{3,\,5,\,1}\,]$. [S]
5. On démontre (ce sera pour une prochaine fois...) la réciproque du résultat obtenu dans les questions V.2 et V.3 : un irrationnel est donc quadratique *si et seulement si* son développement en fraction continue est périodique au moins à partir d'un certain rang. Cette caractérisation est un théorème de Lagrange (1798).

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 16 pages.