Polynômes orthogonaux (cas "Legendre")

Le problème se compose de trois parties qui ne sont pas indépendantes.

Tous les résultats utiles sont clairement indiqués dans l'énoncé.

Soient a et b deux réels, avec $a < b$. On désigne par $\mathcal{E} = \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des applications qui sont définies et continues sur le segment $[a,b]$, et qui sont à valeurs réelles.

$\mathcal{P}$ désigne le sous-espace de $\mathcal{E}$ formé des applications polynômiales, et $\mathcal{P}_n$ est le sous-espace de celles qui sont de degré inférieur ou égal à l'entier naturel n.

On se donne une application ω de $\mathcal{E}$, telle que : $\forall x \in]a,b[, \omega(x) > 0$.

Pour f et g dans $\mathcal{E}$, on note $< f, g >= \displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\omega(x)\,\mathrm{d}x$.

Il est clair qu'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathcal{E}$.

Première Partie : familles de polynômes orthogonaux

On dit qu'une suite $(P_n)_{n\geq 0}$ de $\mathcal{P}$ est *orthogonale à degrés échelonnés* (on note *ODE*) si :
– $\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, m \neq n \Rightarrow < P_m, P_n >= 0$.
– $\forall n \in \mathbb{N}, \deg(P_n) = n$.

1. Rappeler pour quelle raison il est possible de construire de telles suites dans $\mathcal{P}$ [S]
2. Dans le reste de cette partie, on note $(P_n)_{n\geq 0}$ une suite *ODE* donnée de $\mathcal{P}$.
   Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$ pour tout Q de $\mathcal{P}_{n-1}$, on a : $< P, Q >= 0$. [S]
3. Montrer qu'une suite $(Q_n)_{n\geq 0}$ de $\mathcal{P}$ est *ODE* si et seulement si pour tout entier naturel n, il existe un scalaire λ_n tel que $Q_n = \lambda_n P_n$. [S]
4. En déduire qu'il existe une unique suite *ODE* formée de polynômes unitaires (c'est-à-dire ayant 1 comme coefficient du terme de plus haut degré.) [S]
5. Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. On veut montrer que les racines de P_n sont toutes réelles, distinctes deux à deux, et qu'elles appartiennent à l'intervalle $]a,b[$.
   Pour cela, on note $\mathcal{S} = \{x_1, \ldots, x_m\}$ l'ensemble éventuellement vide des racines de P_n qui appartiennent à $]a,b[$ et qui sont de multiplicité impaire. Dans cette notation, $x_1, \ldots, x_m$ sont distinctes deux à deux.
   On note enfin $Q_m = (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_m)$, et on pose $Q = 1$ si $\mathcal{S}$ est vide.
   (a) Montrer que m est inférieur ou égal à n. [S]
   (b) En raisonnant par l'absurde, montrer que m est égal à n. [S]
   (c) Conclure [S]
6. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
   (a) Montrer que les polynômes $P_0, P_1, \ldots, P_{n-2}, P_{n-1}, XP_{n-1}$ forment une base de $\mathcal{P}_n$.
   On note ainsi $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$ les réels tels que : $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k P_k + \alpha_n X P_{n-1}$. [S]

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 14 pages.

(b) Montrer que pour tout indice j de $\{0,..,n-3\}$, le coefficient α_j est nul. [S]

(c) En déduire qu'il existe trois suites réelles $(a_n)_{n\geq 2}$, $(b_n)_{n\geq 2}$ et $(c_n)_{n\geq 2}$ telles que : $\forall n \geq 2, P_n = (a_n X + b_n)P_{n-1} + c_n P_{n-2}$. [S]

Deuxième Partie : polynômes de Legendre

Dans cette partie, $a = -1$, $b = 1$, et ω est la fonction constante $x \mapsto 1$.

Cette partie est consacrée à l'étude d'une suite orthogonale à degrés étagés particulière.

1. Montrer qu'il existe une unique suite (L_n) de $\mathcal{P}$, *ODE* et telle que pour tout entier n, on ait $L_n(1) = 1$. Les polynômes L_n sont appelés *polynômes de Legendre*. [S]
2. Pour tout entier naturel n, on pose $U_n(X) = (x^2-1)^n$.
   (a) Soit f une application de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^n$.
   Montrer que $< U, f^{(n)} > = (-1)^n < U_n, f >$. [S]
   (b) Montrer que $(U^{(n)})_{n\geq 0}$ est une suite *ODE* de $\mathcal{P}$. [S]
   (c) Calculer la valeur de $U^{(n)}(1)$ (utiliser la formule de Leibniz). [S]
   (d) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, L_n(x) = \dfrac{1}{n!2^n}\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n$ (Formule de Rodriguès). [S]
   (e) Expliciter le polynôme L_n pour $0 \leq n \leq 4$. [S]
   (f) Montrer que L_n a la parité de n, et que son coefficient dominant vaut $\dfrac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$. [S]
   (g) Si on pose $L_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{[n/2]} \alpha_k x^{n-2k}$, calculer α_k en fonction de n et de k. [S]
3. On reprend ici les notations de la question I-6-c.
   (a) Montrer que pour tout $n \geq 2$, on a : $b_n = 0$ puis $a_n = \dfrac{2n-1}{n}$. [S]
   (b) Etablir finalement que pour tout $n \geq 2$, $L_n = \dfrac{2n-1}{n}xL_{n-1} - \dfrac{n-1}{n}L_{n-2}$ (E_1). [S]
4. (a) Utiliser la relation précédente pour montrer successivement que :
      i. $\forall n \geq 2, n < L_n, L_n > = (2n-1) < L_{n-1}, xL_n >$. [S]
      ii. $\forall n \geq 2, (2n-1) < L_{n-2}, xL_{n-1} > = (n-1) < L_{n-2}, L_{n-2} >$. [S]
      iii. $\forall n \geq 2, (2n+1) < L_n, L_n > = (2n-1) < L_{n-1}, L_{n-1} >$. [S]
   (b) En déduire que pour tout entier $n \geq 0$, $< L_n, L_n > = \dfrac{2}{2n+1}$. [S]
5. En considérant l'égalité $(x^2-1)U_n' = 2nxU_n$, montrer :
   $\forall n \in \mathbb{N}, (x^2-1)L_n'' + 2xL' - n(n+1)L_n = 0$ (E_2). [S]
6. (a) A partir de $U_n' = 2nxU_{n-1}$ prouver que $\forall n \in \mathbb{N}^*, L_n' = xL_{n-1}' + nL_{n-1}$ (E_3). [S]

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 14 pages.

(b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, nL_n = xL'_n - L'_{n-1}$ (E_4).
(indication : dériver (E_1) et combiner le résultat avec (E_3).) [S]

(c) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, (x^2-1)L'_n = n(xL_n - L_{n-1})$ (E_5). [S]

7. On sait (cf I-5-c) que les tous zéros de L_n (si $n \geq 1$) sont réels distincts, et dans $]-1,1[$.
On veut montrer que pour tout $n \geq 2$, les zéros de L_{n-1} "séparent" les n zéros de L_n.
On note $-1 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < 1$ les zéros de L_n.
On note $-1 < y_1 < \cdots < y_{n-1} < 1$ les zéros de L_{n-1}.

(a) Pour tout k de $\{1, ...n\}$, montrer que $L_{n-1}(x_k)$ a le signe de $L'_n(x_k)$. [S]

(b) En déduire que $\forall k \in \{1, ..., n-1\}, y_k \in]x_k, x_{k+1}[$. [S]

Troisième Partie : quadratures de Gauss

On reprend les notations de la partie II, et notamment les polynômes de Legendre L_n.

On va utiliser ces polynômes dans l'approximation numérique des intégrales sur $[-1,1]$.

Soit n un entier naturel non nul.

On note $(x_k)_{1\leq k\leq n}$ les racines de L_n avec $-1 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < 1$.

Pour tout k de $\{1,\ldots,n\}$, on note $R_k = \prod_{j=1, j\neq k}^{j=n} \frac{x-x_j}{x_k-x_j}$, et $\lambda_k = \int_{-1}^{1} R_k(t)\,\mathrm{d}t$.

1. En observant que le polynôme $R_k - 1$ est divisible par $x - x_k$, montrer que :
$\forall k \in \{1,\ldots,n\}, \int_{-1}^{1} R_k(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} R_k^2(t)\,\mathrm{d}t$.
En déduire que les coefficients λ_k sont strictement positifs. [S]

2. Montrer que pour tout polynôme P de $\mathcal{P}_{2n-1}$, on a $\int_{-1}^{1} P(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k P(x_k)$.
(on considèrera la division euclidienne de P par L_n.) [S]

3. Soit $\varphi : \mathcal{P}_{2n-1} \to \mathbb{R}$ définie par : $\varphi(P) = (P(x_1), \ldots, P(x_n), P'(x_1), \ldots, P'(x_n))$.
Montrer que φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. [S]

4. Soit f une application dérivable de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$.
Montrer qu'il existe un unique polynôme P de $\mathcal{P}_{2n-1}$ tel que :
$\forall k \in \{1,\ldots,n\}, \begin{cases} P(x_k) = f(x_k) \\ P'(x_k) = f'(x_k) \end{cases}$
Dans la suite de cette partie, ce polynôme sera noté $S(f)$. [S]

5. Montrer que $\int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k) = \int_{-1}^{1} (f - S(f))(t)\,\mathrm{d}t$. [S]

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 14 pages.

6. Soit f une application de classe $\mathcal{C}^{2n}$ de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$.
On note $M_{2n} = \sup\{|f^{(2n)}(x)|, -1 \leq x \leq 1\}$.
Soit t un élément de $[-1,1]$, n'appartenant pas à l'ensemble $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.
On pose $g = f - S(f) - \mu L_n^2$ où le réel μ est choisi de telle sorte que $g(t) = 0$.
   (a) Montrer qu' il existe un point c de $[-1,1]$ tel que $g^{(2n)}(c) = 0$. [S]
   (b) En déduire que $\mu = \dfrac{2^{2n} n!^4}{(2n)!^3} f^{(2n)}(c)$ (utiliser II-2-f). [S]
   (c) Montrer que : $\forall t \in [-1,1],\ |(f - S(f))(t)| \leq \dfrac{2^{2n}(n!)^4}{(2n)!^3} M_{2n}\, L_n^2(t)$. [S]
   (d) Conclure que : $\left|\displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)\right| \leq K_n M_{2n}$ avec $K_n = \dfrac{2^{2n+1} n!^4}{(2n+1)(2n)!^3}$. [S]
   (e) Evaluer le coefficient K_n pour $n = 3$, $n = 4$ et $n = 5$. [S]
   (f) Montrer que si $n = 3$ les résultats précédents conduisent à l'approximation :
   $$\int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t \approx \frac{1}{9}\left[5f(-\sqrt{3/5}) + 8f(0) + 5f(\sqrt{3/5})\right]$$
   Donner un majorant de l'erreur commise, et préciser pour quels polynômes cette approximation est une égalité. [S]

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 14 pages.

Corrigé du problème

Première Partie : familles de polynômes orthogonaux

1. Pour construire une famille ODE de $\mathcal{P}$, il suffit d'appliquer le procédé d'orthogonalisation Schmidt à la famille $1, X, X^2, \ldots, X^n, \ldots$

   Ce procédé forme une famille orthonormale (donc orthogonale) de polynômes P_n tels que, en notant p_n la projection orthogonale de $\mathcal{P}_n$ sur $\mathcal{P}_{n-1}$:

   $$\forall n \in \mathbb{N}, P_n = \frac{\|Q_n\|}{Q_n}, \text{ où } Q_n = X^n - p_n(X^n).$$

   Ainsi définis, les polynômes P_n sont effectivement de degré n. [Q]

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les polynômes $P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}$ forment une base de $\mathcal{P}_{n-1}$ (c'est une famille à degrés échelonnés.)

   Le polynôme P_n est donc orthogonal à $P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}$ donc à leurs combinaisons linéaires, donc à tout polynôme Q de $\mathcal{P}_{n-1}$: $\forall Q \in \mathcal{P}_{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*, < Q, P_n >= 0$. [Q]

3. – Supposons que pour n de $\mathbb{N}$, il existe λ_n dans $\mathbb{R}^*$ tel que $Q_n = \lambda_n P_n$.

   Alors, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $\deg Q_n = \deg P_n = n$.

   D'autre part, $\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2$, avec $m \neq n$, on a : $< Q_m, Q_n >= \lambda_n \lambda_n < P_m, P_n >= 0$.

   – Réciproquement, on suppose que (Q_n) est une suite ODE ede $\mathcal{P}$.

   Pour tout n de $\mathbb{N}$, le polynôme Q_n, qui est de degré n, se décompose sur la base $P_0, P_1, \ldots, P_n$ de $\mathcal{P}_n$: $Q_n = \lambda_n P_n + \lambda_{n-1} P_{n-1} + \cdots + \lambda_0 P_0$.
   $R_n = \lambda_{n-1} P_{n-1} + \cdots + \lambda_0 P_0$ est dans $\mathcal{P}_{n-1}$, donc orthogonal à Q_n et à $\lambda_n P_n$ (cf 2).
   Donc R_n est orthogonal à $R_n = Q_n - \lambda_n P_n$. On en déduit $R_n = 0$, puis $Q_n = \lambda_n P_n$ (avec $\lambda_n \neq 0$ car par hypothèse $\deg Q_n = n$.)
   [Q]

4. En particulier, si on impose aux polynômes Q_n d'être unitaires, le coefficient λ_n est déterminé de manière unique (comme inverse du coefficient dominant de P_n.)

   Il existe donc dans $\mathcal{P}$ une unique famille ODE de polynômes unitaires. [Q]

5. (a) Avec les notations du problème, $x_1, \ldots, x_p$ sont p racines distinctes de P_n, qui est de degré n : on a nécessairement $p \leq n$. [Q]

   (b) Supposons $p < n$. Le polynôme $P_n Q$ n'admet (éventuellement) dans $]a,b[$ que des racines de multiplicité paire : il a donc un signe constant sur $]a,b[$ et donc sur $[a,b]$.

   D'autre part, $\displaystyle\int_{-a}^{b} P_n Q =< P_n, Q >= 0$ car $\deg Q = p < n$.

   L'application $x \mapsto (P_n Q)(x)$ est continue sur $[a,b]$, de signe constant, et d'intégrale nulle : c'est donc l'application nulle sur $[a,b]$.

   Comme il s'agit d'un polynôme, c'est le polynôme nul : on aboutit à une contradiction car $\deg(P_n Q) = n + p \geq 1$.

   On en déduit $p = n$. [Q]

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 14 pages.