Séries numériques et équation différentielle linéaire

D'après le concours IENAC 95, épreuve commune.

Première partie

Dans cette partie on considère une série de terme général $u_n > 0$, définie à partir du rang n_0 et de somme partielle $U_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$ pour $n \geq n_0$.

1. On suppose qu'il existe une suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs, un entier $n_1 \geq n_0$ et un réel $K > 0$ tels que $b_n \dfrac{u_n}{u_{n+1}} - b_{n+1} > K$ pour tout $n \geq n_1$.

   Établir alors l'existence d'un réel M, qu'on exprimera en fonction de K, b_{n_1}, u_{n_1} et U_{n_1}, tel que pour tout $n \geq n_1$ on ait $U_n < M$.
   Que peut-on en conclure pour la suite (U_n) et pour la série de terme général u_n ? [S]
2. On suppose qu'il existe une suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^{+*}$ telle que la série $\sum \dfrac{1}{b_n}$ soit divergente, et un entier $n_1 \geq n_0$ tels que $b_n \dfrac{u_n}{u_{n+1}} - b_{n+1} < 0$ pour tout $n \geq n_1$.

   Que peut-on alors dire de la nature de la série de terme général u_n ? [S]
3. Déduire de ce qui précéde un critère d'étude de la série $\sum u_n$ lorsque $b_n = n$. [S]
4. On suppose maintenant que $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = \ell$, où ℓ est un réel.

   Que peut-on alors dire de $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$?

   Le critère de d'Alembert permet-il de déterminer la nature de la série $\sum u_n$ quand $\ell < 0$, ou quand $\ell \geq 0$, et pourquoi ? [S]
5. Démontrer que les résultats précédents permettent de déterminer la nature de $\sum u_n$ quand : $\ell > 1$, ou $\ell < 1$, ou $\ell = 1^-$ (c'est-à-dire $\ell = 1$ par valeurs inférieures). [S]

Deuxième partie

Soit (E) l'équation différentielle linéaire $x(4-x)y' + (2-x)y - 1 = 0$.

1. (a) Supposant que la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est solution de (E) dans un intervalle de centre 0, déterminer a_0 et la relation liant a_n et a_{n-1} pour tout $n \geq 1$. [S]
   (b) Déterminer l'unique série entière dont les coefficients vérifient ces conditions. [S]
   (c) Déterminer le rayon de convergence R de cette série. [S]
2. On pose $v_n = a_n(-R)^n$ et $w_n = a_n R^n$.
   (a) Montrer que w_n peut se mettre sous la forme du produit $w_n = A\prod_{k=1}^{n} \dfrac{1}{1+t_k}$ où A et t_k sont des réels à déterminer.
   Déterminer la nature de la suite $(\ln w_n)$ puis la limite de la suite (w_n). [S]

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 9 pages.

(b) Préciser la nature de la série de terme général v_n. [S]

(c) Etudier la nature de la série $\sum w_n$ en utilisant les résultats de la partie I. [S]

3. Donner pour la série entière de la question II-1, le plus grand intervalle de convergence, puis le plus grand intervalle de convergence absolue. [S]
4. En déduire l'existence d'une fonction f, développable en série entière sur un intervalle à préciser, et qui est solution de (E) sur cet intervalle. [S]

Troisième partie

1. (a) A tout réel x de l'intervalle $]0,4[$ on associe l'intégrale $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u(4-u)}}$.
Prouver que cette intégrale existe et qu'elle a une limite finie quand x tend vers 4.
Vérifier que $F(x)$ s'écrit $F(x) = \alpha \arcsin \phi(x)$ (déterminer α et la fonction ϕ.) [S]

(b) Donner une expression, valable sur $]0,4[$, de la solution générale de (E). [S]

(c) Démontrer qu'il existe une solution unique y_1 de (E) sur $]0,4[$ admettant une limite finie en 0 et exprimer cette solution à l'aide de F. [S]

2. On étudie, dans cette question, les solutions de (E) dans $]-\infty,0[$.
Dans ce but, on introduit l'intégrale $G(x) = \displaystyle\int_x^0 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u(u-4)}}$.

(a) Montrer que cette intégrale existe et qu'elle s'écrit sous la forme $G(x) = \beta \operatorname{argsh} \psi(x)$ (préciser le réel β et la fonction ψ.). On rappelle que :
- La fonction argsh est définie sur $\mathbb{R}$ par $\operatorname{argsh} x = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.
- Elle est la bijection réciproque de l'application $x \mapsto \operatorname{sh} x$.
- Sa dérivée est l'application $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

[S]

(b) Donner une expression des solutions de (E) sur $]-\infty,0[$. [S]

(c) Démontrer qu'il existe une solution unique y_2 de (E) sur $]-\infty,0[$ admettant une limite finie au point 0 et exprimer cette solution à l'aide de G. [S]

3. Donner une expression, valable sur l'intervalle $]4,+\infty[$, de la solution générale de (E). [S]

Quatrième partie

On se propose de chercher s'il existe des solutions de l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}$.

1. (a) Déterminer la dérivée à droite de y_1 et la dérivée à gauche de y_2 en $x = 0$. [S]

(b) Prouver alors qu'il existe, sur l'intervalle $]-\infty,4[$, une solution g de (E) dont la restriction à l'intervalle $]-4,4[$ est égale à f. [S]

2. Montrer qu'il existe une solution unique h de (E) sur $]0,+\infty[$.
Pour cela, on utilisera le changement de variable $t = 4 - x$. [S]
3. Etudier l'existence de solutions de (E) sur $\mathbb{R}$. [S]

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 9 pages.

Corrigé du problème

Première partie

Dans cette partie on considère une série de terme général $u_n > 0$, définie à partir du rang n_0 et de somme partielle $U_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$ pour $n \geq n_0$.

1. – L'hypothèse faite ici s'écrit : $\forall m \geq n_1,\ b_m u_m - b_{m+1}u_{m+1} > K u_{m+1}$
   et elle implique : $\forall n > n_1,\ b_{n_1} - b_n u_n > K \sum_{m=n_1}^{n-1} u_{m+1} = K[U_n - U_{n_1}]$.
   Remarque : cette inégalité est évidente si $n = n_1$.
   – On constate que la suite (U_n), dont on sait qu'elle est croissante (car les u_n sont > 0) est majorée. Cette suite est donc convergente, ce qui signifie que la série $\sum u_n$ est elle-même convergente.
   [Q]
2. L'hypothèse faite ici implique que : $\forall n \geq n_1,\ b_n u_n < b_{n+1}u_{n+1}$, ce qui signifie que la suite $(b_n u_n)$ est croissante pour $n \geq n_1$.
   En particulier : $\forall n \geq n_1,\ 0 < b_{n_1}u_{n_1} \leq b_n u_n$.
   Cela s'écrit : $\forall n \geq n_1, u_n \geq \dfrac{\lambda}{b_n}$, avec $\lambda = b_{n_1}u_{n_1} > 0$.
   La série $\sum \dfrac{1}{b_n}$ étant divergente, cela implique que la série $\sum u_n$ est divergente. [Q]
3. Avec $b_n = n$, la quantité $b_n \dfrac{u_n}{u_{n+1}} - b_{n+1}$ s'écrit : $n(\dfrac{u_n}{u_{n+1}} - 1) - 1$.
   On peut donc affirmer :
   – Si $\exists n_1 \geq n_0$ tq : $\forall n \geq n_1,\ n\Big(\dfrac{u_n}{u_{n+1}} - 1\Big) < 1$, alors $\sum u_n$ est divergente.
   On utilise en effet ici le fait que la série $\sum \dfrac{1}{b_n} = \sum \dfrac{1}{n}$ est divergente.
   Cela se produit en particulier si $\lim\limits_{n\to+\infty} n\Big(\dfrac{u_n}{u_{n+1}} - 1\Big) < 1$.
   – Si $\exists n_1 \geq n_0$ et $K > 0$ tq : $\forall n \geq n_1,\ n\Big(\dfrac{u_n}{u_{n+1}} - 1\Big) > 1 + K$, alors $\sum u_n$ est convergente.
   Cela se produit en particulier si $\lim\limits_{n\to+\infty} n\Big(\dfrac{u_n}{u_{n+1}} - 1\Big) > 1$.
   [Q]
4. Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, $\exists n_1 \geq n_0$ tq : $n \geq n_1 \Rightarrow \left|n\Big(\dfrac{u_n}{u_{n+1}} - 1\Big) - \ell\right| \leq 1$.
   On en déduit : $n \geq n_1 \Rightarrow \left|\dfrac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right| \leq \dfrac{1 + |\ell|}{n} \to 0$.
   Cela implique $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{u_{n+1}} = 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{u_{n+1}} = 1$
   (C'est le cas douteux de la règle de d'Alembert.)

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 9 pages.