Equation différentielle linéaire et produit scalaire

D'après le concours "Mines-Ponts" 98, épreuve de Maths-1, option PC.

Pour tout réel μ, on note (E_μ) l'équation différentielle : $16(x^2-x)y'' + (16x-8)y' - \mu y = 0$.

On note $E_\mu(I)$ l'espace vectoriel des solutions de (E_μ) sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Première partie

1. **Intervalles de définition des solutions :**
   Déterminer trois intervalles I, les plus grands possible, deux à deux disjoints, pour lesquels la dimension de l'espace vectoriel $E_\mu(I)$ est égale à 2. [S]

2. **Solutions développables en série entière dans un intervalle de centre 0 :**
   Soit $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

   (a) Déterminer la relation entre a_n et a_{n+1} $(n \geqslant 0)$, pour que y soit solution de (E_μ). En déduire une expression de a_n en fonction de a_0, n et μ (introduire $(2n)!$). [S]

   (b) Le réel a_0 étant supposé différent de 0, déterminer suivant les valeurs du réel μ le rayon de convergence R. Expliciter le coefficient a_n lorsque R est infini. [S]

3. **Étude de la fonction φ :**
   Dans cette question et dans la suivante, on suppose que $a_0 = \mu = 1$.
   Soit φ la fonction définie au moins sur $]-R, R[$ par la relation : $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

   (a) Pour tout n, exprimer a_n à l'aide du coefficient binômial $\binom{4n}{2n}$.
   Déterminer, en utilisant la formule de Stirling, deux réels α et k (k différent de 0), tels qu'un équivalent de a_n, lorsque l'entier n tend vers l'infini, soit $\dfrac{k}{n^\alpha}$. [S]

   (b) Démontrer que la fonction φ est définie et continue sur le segment $[-R, R]$. [S]

   (c) Démontrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-R, R[$, puis que sa dérivée φ' admet une limite à droite en $-R$. En déduire que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-R, R[$. [S]

4. **Étude de la dérivée φ' lorsque le réel x tend vers 1**

   (a) Un résultat préparatoire : soit une suite réelle positive $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la série entière de terme général $b_n x^n$ $(n \in \mathbb{N})$ ait un rayon de convergence égal à 1.
   Soit $g(x)$ la somme de cette série : $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$.
   Démontrer que si g est majorée sur $[0, 1[$ alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ est convergente. [S]

   (b) Préciser la nature de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} n a_n$.
   En déduire le comportement de $\varphi'(x)$ lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures. [S]

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 9 pages.

Deuxième partie

Dans cette partie, $\mu = 1$. Le but est de résoudre (E_1) sur $I =]0, 1[$.

Il pourra être utile de poser $E_1(y)(x) = 16(x^2 - x)y''(x) + (16x - 8)y'(x) - y(x)$.

Soit θ la fonction définie sur $]0, \pi[$ par $\theta(t) = \dfrac{1}{2}(1 + \cos t)$.

1. Déterminer une équation différentielle (F) telle que la fonction y est solution de (E_1) sur I si et seulement si la fonction $z = y \circ \theta : t \mapsto y(\theta(t))$ est solution de (F) sur $]0, \pi[$. [S]
2. On admet le résultat ci-dessous, valable pour $0 < t < \pi$:

$$\cos\frac{t}{4} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+\cos t}{2}}} \quad \text{et} \quad \sin\frac{t}{4} = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+\cos t}{2}}}$$

   En déduire une base de l'espace vectoriel des solutions de (E_1) sur I. [S]
3. En déduire une expression de la restriction à l'intervalle I de la fonction φ étudiée dans les question (I-3) et (I-4), à l'aide de fonctions élémentaires. [S]

Troisième partie

Soit $\mathcal{C}$ l'espace vectoriel des fonctions de $\bar{I} = [0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ et qui sont de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Soit D l'endomorphisme de $\mathcal{C}$ défini par :

$$\forall f \in \mathcal{C},\ \forall x \in \bar{I},\ D(f)(x) = 16(x^2 - x)f''(x) + (16x - 8)f'(x)$$

1. **L'espace préhilbertien réel $(\mathcal{C}, (\ |\ ))$:**
   Étant données f et g dans $\mathcal{C}$, montrer que $x \mapsto \dfrac{f(x)g(x)}{\sqrt{x(1-x)}}$ est intégrable sur I.
   Dans toute la suite, on notera $(f \mid g) = \displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{x(1-x)}}\,\mathrm{d}x$. On admet qu'on définit ainsi un produit scalaire : $(\mathcal{C}, (\ |\ ))$ est donc un espace préhilbertien réel. [S]
2. **Une propriété de l'endomorphisme D :**
   Montrer que pour toutes fonctions f et g de $\mathcal{C}$, on a : $(f \mid D(g)) = (D(f) \mid g)$.
   Indication : on pourra vérifier que $D(f)(x) = -16\sqrt{x - x^2}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sqrt{x - x^2}f'(x)\right)$. [S]
3. **Valeurs propres et sous-espaces propres :**
   Soit λ une valeur propre de l'endomorphisme D. Démontrer que λ est positive ou nulle.
   Soient λ et μ deux valeurs propres distinctes. Démontrer que les sous-espaces propres G_λ et G_μ associés sont orthogonaux dans l'espace préhilbertien réel $\mathcal{C}$. [S]
4. **Noyau et espace image de l'endomorphisme D :**
   Déterminer le noyau de l'endomorphisme D. Démontrer que toute fonction h de l'espace image $D(\mathcal{C})$ est orthogonale à la fonction constante égale à 1 : $(1 \mid h) = 0$. [S]

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 9 pages.

5. **Dimension du sous-espace propre G_μ associé à une valeur propre μ :**
Soit μ une valeur propre de l'endomorphisme D, et G_μ le sous-espace propre associé.
   (a) Démontrer que la dimension de G_μ est inférieure ou égale à 2. [S]
   (b) Soient y_1 et y_2 deux éléments de G_μ.
   On définit leur wronskien $W : x \mapsto W(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)$.
   Déterminer W et en déduire la dimension du sous-espace propre G_μ. [S]

6. **Éléments propres de l'application Δ :**
Soit $\mathcal{P}$ le sous-espace de $\mathcal{C}$ formé des restrictions à $\bar{I}$ des fonctions polynomiales.
   (a) Montrer que $\mathcal{P}$ est stable par D. On note Δ la restriction de D à $\mathcal{P}$. [S]
   (b) Déterminer la suite croissante $(\lambda_q)_{q\in\mathbb{N}}$ des valeurs propres de l'endomorphisme Δ ainsi que le sous-espace propre associé à chaque valeur propre λ_q.
   Pour chaque λ_q, préciser le degré de T_q, élément propre associé tel que $T_q(0) = 1$. [S]
   (c) Montrer que l'image de Δ est l'ensemble des éléments h de $\mathcal{P}$ tels que $(h \mid 1) = 0$. [S]

7. **Valeurs propres de l'endomorphisme D :**
   (a) Soit g une fonction de $\mathcal{C}$ supposée orthogonale au sous-espace vectoriel $\mathcal{P}$.
   Montrer que g est la fonction nulle.
   Indication : utiliser le théorème d'approximation d'une fonction continue sur un compact par une fonction polynomiale. [S]
   (b) En déduire les valeurs propres de l'endomorphisme D. [S]

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 9 pages.