Normes matricielles et rayon spectral

Dans tout le problème, on désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

- $\mathcal{M}_n$ désigne l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes.
  Pour toute matrice $A=(a_{ij})$ de $\mathcal{M}_n$, on note $(A)_{ij}=a_{ij}$ son coefficient d'indice (i,j).
  Dans $\mathcal{M}_n$, on note ${}^{\mathrm{T}}M$ la transposée d'une matrice M.
  On désigne par I la matrice identité, et la matrice nulle est notée 0.
  On note $\mathrm{Sp}\,(A)$ l'ensemble des valeurs propres d'une matrice A (son *spectre*).
  On note $\rho(A)$ le nombre défini par : $\rho(A)=\max\{|\lambda|\,,\lambda\in\mathrm{Sp}\,(A)\}$ (le *rayon spectral* de A.)
- Les éléments de $\mathbb{C}^n$ sont identifiés à des "matrices colonnes" à n lignes.
  On note $Z=(z_k)$ un élément quelconque de $\mathbb{C}^n$ et $(Z)_k=z_k$.
- On dira qu'une norme ψ sur $\mathcal{M}_n$ est *matricielle* si : $\forall (A,B)\in\mathcal{M}_n^2,\ \psi(AB)\leq\psi(A)\psi(B)$.
  Pour toute norme N sur $\mathbb{C}^n$, on pose : $\forall A\in\mathcal{M}_n, \widetilde{N}(A)=\sup\limits_{Z\neq 0}\dfrac{N(AZ)}{N(Z)}$.
  On admet que $\widetilde{N}$ est une norme matricielle sur $\mathcal{M}_n$ (dite *associée* à N.)
  Par définition $\widetilde{N}(A)$ est donc le réel minimum k tel que pour tout Z de $\mathbb{C}^n$: $N(AZ)\leq kN(Z)$.
- On rappelle qu'une suite $(u_k)_{k\geq 0}$ d'un espace vectoriel E de dimension finie et muni d'une norme N converge vers un vecteur u de E si $N(u_k-u)$ tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$, et que cela ne dépend pas de la norme utilisée.

Partie I

On rappelle que N_∞ est la norme définie sur $\mathbb{C}^n$ par : $\forall Z=(z_k),\quad N_\infty(Z)=\max\limits_{1\leq k\leq n}|z_k|$.

Pour toute matrice $A=(a_{ij})$ de $\mathcal{M}_n$, on note $\varphi(A)=\max\limits_{1\leq i\leq n}\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}|$.

1. Prouver que $\widetilde{N}_\infty(A)\leq\varphi(A)$. [S]
2. Soit i un entier tel que $\varphi(A)=\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}|$.
   On définit le vecteur $Z=(z_k)$ de $\mathbb{C}^n$ par $z_k=\dfrac{\overline{a_{ik}}}{|a_{ik}|}$ si $a_{ik}\neq 0$ et $z_k=0$ sinon.
   A l'aide de Z, montrer que $\widetilde{N}_\infty(A)=\varphi(A)$. [S]
3. Soit ψ une norme matricielle sur $\mathcal{M}_n$. Montrer que : $\forall A\in\mathcal{M}_n,\rho(A)\leq\psi(A)$.
   (Indication : utiliser la matrice $Z\,{}^{\mathrm{T}}Z$, où Z est un vecteur bien choisi de $\mathbb{C}^n$.) [S]

Partie II

Soient A une matrice de $\mathcal{M}_n$. On veut prouver l'équivalence $\lim\limits_{k\to\infty}A^k=0\Leftrightarrow\rho(A)<1$.

Soit ε un réel strictement positif.

On va d'abord montrer l'existence d'une norme N sur $\mathbb{C}^n$ telle que $\widetilde{N}(A)\leq\rho(A)+\varepsilon$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.

1. Rappeler pourquoi il existe une matrice inversible U de $\mathcal{M}_n$ telle que $T = U^{-1}AU$ soit triangulaire supérieure. Dans toute la suite on note $T = (t_{ij})$.
   Rappeler la signification de l'ensemble $S = \{t_{ii}, 1 \leq i \leq n\}$ pour la matrice A. [S]
2. Montrer qu'il existe un réel $\delta > 0$ tel que : $\forall i \in \{1, \ldots, n-1\}$, $\sum_{j=i+1}^{n} \delta^{j-i} |t_{ij}| \leq \varepsilon$. [S]
3. Avec un tel δ, soit Δ la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n$ de coefficients diagonaux $1, \delta, \ldots, \delta^{n-1}$.
   On note $V = U\Delta$, où U désigne la matrice inversible évoquée à la question II-1.
   On note ψ l'application définie sur $\mathcal{M}_n$ par $\psi(B) = \widetilde{N}_\infty(V^{-1}BV)$.
   (a) Calculer $V^{-1}AV$ et prouver que $\psi(A) \leq \rho(A) + \varepsilon$. [S]
   (b) Pour tout Z de $\mathbb{C}^n$, on pose $N(Z) = N_\infty(V^{-1}Z)$.
   Montrer qu'on définit ainsi une norme N sur $\mathbb{C}^n$ telle que $\psi = \widetilde{N}$. [S]
4. (a) Montrer que $\lim_{k\to\infty} A^k = 0 \Rightarrow \rho(A) < 1$.
   (Indication : utiliser A^kZ, où Z est un vecteur bien choisi de $\mathbb{C}^n$.) [S]
   (b) Réciproquement, montrer que $\rho(A) < 1 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} A^k = 0$.
   (Indication : en le justifiant, utiliser une norme matricielle $\widetilde{N}$ telle que $\widetilde{N}(A) < 1$.) [S]

Partie III

1. Soient σ un élément de $[0, 1[$ et N une norme sur $\mathbb{C}^n$.
   Soit f une application σ-lipschitzienne sur l'espace vectoriel normé $(\mathbb{C}^n, N)$.
   On considère une suite $(Z_k)_{k\geq 0}$ de $\mathbb{C}^n$ telle que $Z_{k+1} = f(Z_k)$ pour tout k de $\mathbb{N}$.
   (a) Montrer que pour tous entiers naturels m, p, $N(Z_{m+p} - Z_m) \leq \dfrac{\sigma^m}{1-\sigma} N(Z_1 - Z_0)$. [S]
   (b) Montrer que la suite (Z_k) est convergente et que sa limite Z vérifie $f(Z) = Z$. [S]
   (c) Montrer que l'application f admet un unique point fixe. [S]
2. Soient W dans $\mathbb{C}^n$ et B dans $\mathcal{M}_n$. Montrer que si $\rho(B) < 1$ alors il existe un vecteur X de $\mathbb{C}^n$ tel que toutes les suites de vecteurs $(Z_k)_{k\geq 0}$ satisfaisant à $Z_{k+1} = BZ_k + W$ convergent vers le vecteur X. [S]
3. Soient A une matrice inversible de $\mathcal{M}_n$ et soit Y un vecteur de $\mathbb{C}^n$.
   Soit M une matrice inversible de $\mathcal{M}_n$.
   On note $F = M^{-1}$ et $Q = M - A$. On suppose $\rho(FQ) < 1$.
   Utiliser F, Q, Y pour définir une application $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ telle que toute suite $(Z_k)_{k\geq 0}$ vérifiant $Z_{k+l} = f(Z_k)$ converge vers l'unique solution du système linéaire $AX = Y$.
   Pour tout Z de $\mathbb{C}^n$, l'expression de $f(Z)$ en fonction de F, Q, Y, Z utilisera les seules opérations d'addition et de multiplication matricielles : en particulier elle ne fera pas appel à l'inversion matricielle. [S]

Remarque : en pratique, on prend pour M une matrice facile à inverser, par exemple une matrice diagonale à coefficients diagonaux non nuls ; ce qui précède fournit alors (sous réserve que la condition $\rho(FQ) < 1$ soit vérifiée) une méthode numérique de résolution approchée du système linéaire $AX = Y$.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.