Méthode de Simpson pour des intégrales doubles

Soit f une application continue sur le segment $[a,b]$. La méthode de Simpson consiste à prendre pour valeur approchée de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ la quantité $\dfrac{b-a}{6}\Big[f(a)+4f(\dfrac{a+b}{2})+f(b)\Big]$.

En généralisant cette idée, on se propose de calculer une valeur approchée de $\displaystyle\iint_\Delta f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, où f est une application continue sur le rectangle $\Delta=[a,A]\times[b,B]$ et à valeurs réelles.

1. On partage Δ en quatre rectangles dont les sommets sont les neuf points A_{ij} de coordonnées $x_i=a+ih,\ y_j=b+jk$, où i et j variant de 0 à 2, avec $h=\dfrac{A-a}{2}$ et $k=\dfrac{B-b}{2}$.

   (a) En utilisant la méthode de Simpson pour calculer $\displaystyle\int_b^B f(x,y)\,\mathrm{d}y$ et $\displaystyle\int_a^A f(x,y_j)\,\mathrm{d}x$, montrer qu'on est conduit à écrire l'approximation :

   $$\iint_\Delta f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\approx\frac{hk}{9}\sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{2}\lambda_{ij}\,f(x_i,y_j)$$

   où λ_{ij} est l'élément de la ligne $i+1$ et de la colonne $j+1$ de $M=\begin{pmatrix}1&4&1\\4&16&4\\1&4&1\end{pmatrix}$. [S]

   (b) Calculer la valeur exacte de $I=\displaystyle\iint_\Delta\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{1+y\cos x}$, où Δ désigne l'ensemble des points M de coordonnées x et y vérifiant $0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}$ et $0\leqslant y\leqslant\dfrac{1}{2}$. [S]

   (c) Donner la valeur approchée de I obtenue à l'aide de la formule vue en 1-a.
   Préciser pour cet exemple l'ordre de grandeur de l'erreur due à la méthode. [S]

2. On partage maintenant Δ en 16 rectangles, en introduisant les points $A_{ij}=(x_i,y_j)$ tels que $x_i=a+ih$, $y_j=b+jk$ avec $h=\dfrac{A-a}{4}$ et $k=\dfrac{B-b}{4}$, où i et j varient de 0 à 4.
   Montrer qu'on est conduit à l'approximation :

   $$\iint_\Delta f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\approx\frac{hk}{9}\sum_{i=0}^{4}\sum_{j=0}^{4}\mu_{ij}f(x_i,y_j)$$

   où μ_{ij} est l'élément de la ligne $i+1$ et de la colonne $j+1$ d'une matrice N, carrée d'ordre 5, que l'on précisera.
   Appliquer cette approximation à l'intégrale $I=\displaystyle\iint_\Delta\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{1+y\cos x}$.
   Préciser l'ordre de grandeur de l'erreur de méthode. [S]

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 4 pages.