Études d'intégrales à paramètres

Dans tout le problème, λ est un réel fixé tel que $\lambda > 1$, et on pose $\mu = \dfrac{1}{\lambda}$.

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^\lambda)^n}\,\mathrm{d}t$.

Partie I. Étude de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

1. (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est bien définie, et qu'elle est monotone. [S]
   (b) En partageant l'intervalle $\mathbb{R}^+$ en trois parties, et pour tout a de $]0,1[$, montrer que $u_n \leqslant a + \dfrac{1}{(1+a^\lambda)^n} + \dfrac{1}{n\lambda - 1}$. En déduire $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$. [S]
2. (a) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, montrer que $u_n = n\lambda(u_n - u_{n+1})$. [S]
   (b) En déduire une expression de u_n en fonction de u_1. [S]
3. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \ln u_n + \mu \ln n$.
   (a) Donner un équivalent de $v_{n+1} - v_n$ quand $n \to +\infty$. [S]
   (b) En déduire $\exists\, M > 0, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}^*, n \geqslant n_0 \Rightarrow |v_{n+1} - v_n| \leqslant \dfrac{M}{n(n-1)}$. [S]
   (c) Montrer alors que la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente. [S]
   (d) En déduire qu'il existe un réel $K > 0$ tel que $u_n \underset{\infty}{\simeq} \dfrac{K}{n^\mu}$. [S]

Partie II. Fonction Γ. Limite de $n^\mu u_n$.

On définit la fonction "Gamma" par $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

1. Préciser le domaine de définition de la fonction Γ. [S]
2. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $c_n = \lambda\, n^\mu\, u_n$.
   (a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout t de $\mathbb{R}^+$ on a $\mathrm{e}^{-nt^\lambda} \leqslant \dfrac{1}{(1+t^\lambda)^n}$. [S]
   (b) En déduire $c_n \geqslant \Gamma(\mu)$ (poser $z = nt^\lambda$). [S]
3. (a) Soit ε dans $]0,1[$. Montrer : $\exists\, a \in]0,1[, \forall\, t \in [0,a], \begin{cases} t(1-\varepsilon) \leqslant \ln(1+t) \\ \dfrac{1}{(1+t^\lambda)^n} \leqslant \exp(-n(1-\varepsilon)t^\lambda) \end{cases}$ [S]
   (b) En déduire $c_n \leqslant \lambda\, n^\mu\, w_n(\varepsilon)$, avec $w_n(\varepsilon) = \displaystyle\int_0^a \mathrm{e}^{-n(1-\varepsilon)t^\lambda}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{(1+a^\lambda)^n} + \frac{1}{n\lambda-1}$. [S]
   (c) Pour ε fixé, montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda\, n^\mu\, w_n(\varepsilon) = \dfrac{\Gamma(\mu)}{(1-\varepsilon)^\mu}$. [S]
4. (a) À partir des résultats précédents, déterminer la limite de la suite $n \mapsto c_n$. [S]
   (b) En déduire un équivalent de u_n quand $n \to \infty$, et déterminer le réel K de la question (I.3.d) au moyen de la fonction Γ. [S]

 ©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 9 pages.

Partie III. Calcul de u_1

On définit la fonction φ, à valeurs complexes, par $\varphi(\theta) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{\mu-1}}{1+te^{i\theta}}\,dt$.

1. (a) Montrer que φ est définie sur $I =]-\pi, \pi[$. [S]

   (b) Montrer que $\varphi(0) = \lambda u_1$. [S]

2. (a) Montrer que $t \mapsto g_\theta(t) = \dfrac{-ie^{i\theta}t^\mu}{(1+te^{i\theta})^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (avec θ dans I). [S]

   (b) On admet que l'application φ est dérivable sur I et que $\varphi'(\theta) = \displaystyle\int_0^{+\infty} g_\theta(t)\,dt$.
   Montrer alors que $\varphi'(\theta) = -\mu i\varphi(\theta)$ pour tout θ de I. [S]

   (c) En déduire que, pour tout θ de I, on a $\varphi(\theta) = \lambda u_1 e^{-i\mu\theta}$. [S]

3. Pour tout θ de I, on pose $L(\theta) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^\mu \sin\theta}{1+2t\cos\theta+t^2}\,dt$.
   Avec ce qui précède, montrer que $L(\theta) = \lambda u_1 \sin(\mu\theta)$ pour tout θ de I. [S]

4. Dans cette question, θ est élément de $]0, \pi[$.

   (a) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin\theta}{1+2t\cos\theta+t^2}\,dt = \theta$. [S]

   (b) Montrer que $\lambda u_1 \sin(\mu\theta) - \theta = M(\theta)\sin\theta$, avec $M(\theta) = \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-t^\mu)^2}{t^\mu(1+2t\cos\theta+t^2)}\,dt$. [S]

   (c) Montrer que $M(\theta)$ (bien sûr définie quand $\theta \in I$) est encore définie si $\theta = \pi$. [S]

   (d) Déduire des résultats précédents l'inégalité $|\lambda u_1 \sin(\mu\theta) - \theta| \leqslant \dfrac{\sin\theta}{1-\mu}$. [S]

   (e) Montrer finalement que $u_1 = \dfrac{\mu\pi}{\sin(\mu\pi)}$. [S]

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 9 pages.

Corrigé du problème

Partie I. Étude de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

1. (a) L'application $t \mapsto \dfrac{1}{(1+t^\lambda)^n}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, et $\dfrac{1}{(1+t^\lambda)^n} \underset{\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{n\lambda}}$ avec $n\lambda > 1$.

Ainsi $t \mapsto \dfrac{1}{(1+t^\lambda)^n}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ donc u_n existe pour tout n.

Par ailleurs, on a $0 \leqslant \dfrac{1}{(1+t^\lambda)^{n+1}} \leqslant \dfrac{1}{(1+t^\lambda)^n}$ pour tout $t \geqslant 0$ et tout $n \geqslant 1$.

Par intégration, il en résulte $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$ pour tout $n \geqslant 1$.

Ainsi la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est positive et décroissante (donc convergente). [Q]

(b) Soit a dans $]0,1[$, et $n \geqslant 1$.

On a $u_n = I_1+I_2+I_3$, où $I_1 = \displaystyle\int_0^a \frac{1}{(1+t^\lambda)^n}\,\mathrm{d}t$, $I_2 = \displaystyle\int_a^1 \frac{1}{(1+t^\lambda)^n}\,\mathrm{d}t$, $I_3 = \displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{(1+t^\lambda)^n}\,\mathrm{d}t$.

– Pour $t \geqslant 0$ on a $\dfrac{1}{(1+t^\lambda)^n} \leqslant 1$ donc $I_1 = \displaystyle\int_0^a \frac{1}{(1+t^\lambda)^n}\,\mathrm{d}t \leqslant a$.

– Pour $t \geqslant a$, on a $\dfrac{1}{(1+t^\lambda)^n} \leqslant \dfrac{1}{(1+a^\lambda)^n}$ donc $I_2 \leqslant \dfrac{1-a}{(1+a^\lambda)^n} \leqslant \dfrac{1}{(1+a^\lambda)^n}$.

– Pour $t > 0$ on a $(1+t^\lambda)^n \geqslant t^{\lambda n}$ donc $I_3 \leqslant \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\lambda n}} = \left[\frac{t^{-n\lambda+1}}{1-n\lambda}\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{n\lambda-1}$.

Par addition, on obtient $u_n \leqslant a + \dfrac{1}{(1+a^\lambda)^n} + \dfrac{1}{n\lambda-1}$ pour tout $n \geqslant 1$.

On sait que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente.

Si on fait tendre n vers $+\infty$ dans l'inégalité précédente, on obtient $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \leqslant a$.

Mais ici a est quelconque dans $]0,1[$. On obtient donc $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$. [Q]

2. (a) On effectue une intégration par parties sur le segment $[0,b]$, avec $b > 0$.

$$\begin{aligned}\int_0^b \frac{1}{(1+t^\lambda)^n}\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{t}{(1+t^\lambda)^n}\right]_0^b + n\lambda\int_0^b \frac{t^\lambda\,\mathrm{d}t}{(1+t^\lambda)^{n+1}} \\ &= \frac{b}{(1+b^\lambda)^n} + n\lambda\left(\int_0^b \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^\lambda)^n} - \int_0^b \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^\lambda)^{n+1}}\right)\end{aligned}$$

Quand $b \to +\infty$, on obtient $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^\lambda)^n}\,\mathrm{d}t = n\lambda\left(\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^\lambda)^n} - \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^\lambda)^{n+1}}\right)$.

Autrement dit : $u_n = n\lambda(u_n - u_{n+1})$ pour tout $n \geqslant 1$. [Q]

(b) On a trouvé $u_{n+1} = \dfrac{n\lambda-1}{n\lambda}u_n$ pour tout $n \geqslant 1$.

Par une récurrence évidente : $u_n = u_1 \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \frac{k\lambda-1}{k\lambda} = \frac{u_1}{\lambda^{n-1}(n-1)!} \prod_{k=1}^{n-1}(k\lambda-1)$. [Q]

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 9 pages.