Études d'intégrales à paramètres

Dans tout le problème, λ est un réel fixé tel que $\lambda > 1$, et on pose $\mu = \dfrac{1}{\lambda}$.

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^\lambda)^n}\,\mathrm{d}t$.

Partie I. Étude de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

1. (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est bien définie, et qu'elle est monotone. [S]
   (b) En partageant l'intervalle $\mathbb{R}^+$ en trois parties, et pour tout a de $]0,1[$, montrer que $u_n \leqslant a + \dfrac{1}{(1+a^\lambda)^n} + \dfrac{1}{n\lambda - 1}$. En déduire $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$. [S]
2. (a) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, montrer que $u_n = n\lambda(u_n - u_{n+1})$. [S]
   (b) En déduire une expression de u_n en fonction de u_1. [S]
3. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \ln u_n + \mu \ln n$.
   (a) Donner un équivalent de $v_{n+1} - v_n$ quand $n \to +\infty$. [S]
   (b) En déduire $\exists\, M > 0, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}^*, n \geqslant n_0 \Rightarrow |v_{n+1} - v_n| \leqslant \dfrac{M}{n(n-1)}$. [S]
   (c) Montrer alors que la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente. [S]
   (d) En déduire qu'il existe un réel $K > 0$ tel que $u_n \underset{\infty}{\sim} \dfrac{K}{n^\mu}$. [S]

Partie II. Fonction Γ. Limite de $n^\mu u_n$.

On définit la fonction "Gamma" par $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

1. Préciser le domaine de définition de la fonction Γ. [S]
2. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $c_n = \lambda\, n^\mu\, u_n$.
   (a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout t de $\mathbb{R}^+$ on a $\mathrm{e}^{-nt^\lambda} \leqslant \dfrac{1}{(1+t^\lambda)^n}$. [S]
   (b) En déduire $c_n \geqslant \Gamma(\mu)$ (poser $z = nt^\lambda$). [S]
3. (a) Soit ε dans $]0,1[$. Montrer : $\exists\, a \in]0,1[, \forall\, t \in [0,a], \begin{cases} t(1-\varepsilon) \leqslant \ln(1+t) \\ \dfrac{1}{(1+t^\lambda)^n} \leqslant \exp(-n(1-\varepsilon)t^\lambda) \end{cases}$ [S]
   (b) En déduire $c_n \leqslant \lambda\, n^\mu\, w_n(\varepsilon)$, avec $w_n(\varepsilon) = \displaystyle\int_0^a \mathrm{e}^{-n(1-\varepsilon)t^\lambda}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{(1+a^\lambda)^n} + \frac{1}{n\lambda - 1}$. [S]
   (c) Pour ε fixé, montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda\, n^\mu\, w_n(\varepsilon) = \dfrac{\Gamma(\mu)}{(1-\varepsilon)^\mu}$. [S]
4. (a) À partir des résultats précédents, déterminer la limite de la suite $n \mapsto c_n$. [S]
   (b) En déduire un équivalent de u_n quand $n \to \infty$, et déterminer le réel K de la question (I.3.d) au moyen de la fonction Γ. [S]

Partie III. Calcul de u_1

On définit la fonction φ, à valeurs complexes, par $\varphi(\theta) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{\mu-1}}{1+t\mathrm{e}^{i\theta}}\,\mathrm{d}t$.

1. (a) Montrer que φ est définie sur $I =]-\pi, \pi[$. [S]

   (b) Montrer que $\varphi(0) = \lambda u_1$. [S]

2. (a) Montrer que $t \mapsto g_\theta(t) = \dfrac{-i\mathrm{e}^{i\theta}t^\mu}{(1+t\mathrm{e}^{i\theta})^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (avec θ dans I). [S]

   (b) On admet que l'application φ est dérivable sur I et que $\varphi'(\theta) = \displaystyle\int_0^{+\infty} g_\theta(t)\,\mathrm{d}t$.
   Montrer alors que $\varphi'(\theta) = -\mu i\varphi(\theta)$ pour tout θ de I. [S]

   (c) En déduire que, pour tout θ de I, on a $\varphi(\theta) = \lambda u_1 \mathrm{e}^{-i\mu\theta}$. [S]

3. Pour tout θ de I, on pose $L(\theta) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^\mu \sin\theta}{1+2t\cos\theta+t^2}\,\mathrm{d}t$.
   Avec ce qui précède, montrer que $L(\theta) = \lambda u_1 \sin(\mu\theta)$ pour tout θ de I. [S]

4. Dans cette question, θ est élément de $]0, \pi[$.

   (a) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin\theta}{1+2t\cos\theta+t^2}\,\mathrm{d}t = \theta$. [S]

   (b) Montrer que $\lambda u_1 \sin(\mu\theta) - \theta = M(\theta)\sin\theta$, avec $M(\theta) = \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-t^\mu)^2}{t^\mu(1+2t\cos\theta+t^2)}\,\mathrm{d}t$. [S]

   (c) Montrer que $M(\theta)$ (bien sûr définie quand $\theta \in I$) est encore définie si $\theta = \pi$. [S]

   (d) Déduire des résultats précédents l'inégalité $|\lambda u_1 \sin(\mu\theta) - \theta| \leqslant \dfrac{\sin\theta}{1-\mu}$. [S]

   (e) Montrer finalement que $u_1 = \dfrac{\mu\pi}{\sin(\mu\pi)}$. [S]

Corrigé du problème

Partie I. Étude de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

1. (a) L'application $t\mapsto \dfrac{1}{(1+t^\lambda)^n}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, et $\dfrac{1}{(1+t^\lambda)^n}\underset{\infty}{\sim}\dfrac{1}{t^{n\lambda}}$ avec $n\lambda>1$.

   Ainsi $t\mapsto \dfrac{1}{(1+t^\lambda)^n}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ donc u_n existe pour tout n.

   Par ailleurs, on a $0\leqslant \dfrac{1}{(1+t^\lambda)^{n+1}}\leqslant \dfrac{1}{(1+t^\lambda)^n}$ pour tout $t\geqslant 0$ et tout $n\geqslant 1$.

   Par intégration, il en résulte $0\leqslant u_{n+1}\leqslant u_n$ pour tout $n\geqslant 1$.

   Ainsi la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est positive et décroissante (donc convergente). [Q]

   (b) Soit a dans $]0,1[$, et $n\geqslant 1$.

   On a $u_n=I_1+I_2+I_3$, où $I_1=\displaystyle\int_0^a\frac{1}{(1+t^\lambda)^n}\,\mathrm{d}t$, $I_2=\displaystyle\int_a^1\frac{1}{(1+t^\lambda)^n}\,\mathrm{d}t$, $I_3=\displaystyle\int_1^\infty\frac{1}{(1+t^\lambda)^n}\,\mathrm{d}t$.

   – Pour $t\geqslant 0$ on a $\dfrac{1}{(1+t^\lambda)^n}\leqslant 1$ donc $I_1=\displaystyle\int_0^a\frac{1}{(1+t^\lambda)^n}\,\mathrm{d}t\leqslant a$.

   – Pour $t\geqslant a$, on a $\dfrac{1}{(1+t^\lambda)^n}\leqslant\dfrac{1}{(1+a^\lambda)^n}$ donc $I_2\leqslant\dfrac{1-a}{(1+a^\lambda)^n}\leqslant\dfrac{1}{(1+a^\lambda)^n}$.

   – Pour $t>0$ on a $(1+t^\lambda)^n\geqslant t^{\lambda n}$ donc $I_3\leqslant\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^{\lambda n}}=\left[\frac{t^{-n\lambda+1}}{1-n\lambda}\right]_1^{+\infty}=\frac{1}{n\lambda-1}$.

   Par addition, on obtient $u_n\leqslant a+\dfrac{1}{(1+a^\lambda)^n}+\dfrac{1}{n\lambda-1}$ pour tout $n\geqslant 1$.

   On sait que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente.

   Si on fait tendre n vers $+\infty$ dans l'inégalité précédente, on obtient $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\leqslant a$.

   Mais ici a est quelconque dans $]0,1[$. On obtient donc $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$. [Q]

2. (a) On effectue une intégration par parties sur le segment $[0,b]$, avec $b>0$.

   $$\begin{aligned}\int_0^b\frac{1}{(1+t^\lambda)^n}\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{t}{(1+t^\lambda)^n}\right]_0^b+n\lambda\int_0^b\frac{t^\lambda\,\mathrm{d}t}{(1+t^\lambda)^{n+1}}\\ &=\frac{b}{(1+b^\lambda)^n}+n\lambda\Big(\int_0^b\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^\lambda)^n}-\int_0^b\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^\lambda)^{n+1}}\Big)\end{aligned}$$

   Quand $b\to+\infty$, on obtient $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+t^\lambda)^n}\,\mathrm{d}t=n\lambda\Big(\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^\lambda)^n}-\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^\lambda)^{n+1}}\Big)$.

   Autrement dit : $u_n=n\lambda(u_n-u_{n+1})$ pour tout $n\geqslant 1$. [Q]

   (b) On a trouvé $u_{n+1}=\dfrac{n\lambda-1}{n\lambda}u_n$ pour tout $n\geqslant 1$.

   Par une récurrence évidente : $u_n=u_1\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\frac{k\lambda-1}{k\lambda}=\frac{u_1}{\lambda^{n-1}(n-1)!}\prod_{k=1}^{n-1}(k\lambda-1)$. [Q]