Matrices stochastiques

On note E_n le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices $M = (m_{ij})$ telles que :

- Pour tous indices i et j de $\{1, \ldots, n\}$, $m_{ij} \geq 0$.
- Pour tout indice i de $\{1, \ldots, n\}$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} m_{ij} = 1$.

1. Montrer que l'ensemble E_n est non vide et qu'il est stable pour le produit des matrices. [S]
2. Dans toute la suite du problème, M est un élément quelconque de E_n.
   Montrer que 1 est valeur propre de M, et indiquer un vecteur propre associé très simple. [S]
3. Soit λ une valeur propre réelle ou complexe de M.
   On note u un vecteur propre associé, réel ou complexe.
   On note $u_1, u_2, \ldots, u_n$ les composantes successives de u.
   (a) Soit h un indice de $\{1, \ldots, n\}$ tel que $|u_h| = \max\{|u_j|, 1 \leq j \leq n\}$.
   Montrer que $|\lambda - m_{hh}| \leq 1 - m_{hh}$. En déduire que $|\lambda| \leq 1$. [S]
   (b) Soit $d = \min\{m_{jj}, 1 \leq j \leq n\}$. Montrer que $|\lambda - d| \leq 1 - d$.
   Donner une interprétation géométrique de ce résultat.
   Montrer que si $d > 0$, alors 1 est la seule valeur propre de M de module 1. [S]
4. Montrer que si $m_{jj} > \dfrac{1}{2}$ pour tout indice j de $\{1, \ldots, n\}$, alors M est inversible. [S]
5. On suppose que pour tous indices (i, j) de $\{1, \ldots, n\}$, m_{ij} est strictement positif.
   Montrer que la matrice $M - I_n$ est de rang $n - 1$.
   Indication : si le vecteur réel $u = (u_1, \ldots, u_n)$ est dans $\ker(M - I_n)$, utiliser la composante u_i qui est minimum. [S]
6. Dans cette question, λ est une valeur propre de module 1 de M.
   On va montrer que λ est une racine m-ième de l'unité, avec $1 \leq m \leq n$.
   Pour cela, on note $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ un vecteur propre réel ou complexe de M pour λ.
   Soit h un indice de $\{1, \ldots, n\}$ tel que $|u_h| = \max\{|u_j|, 1 \leq j \leq n\}$.
   (a) Montrer qu'il existe un indice k de $\{1, \ldots, n\}$ tel que $\lambda u_h = u_k$.
   Indication : considérer l'enveloppe convexe des points A_k d'affixes u_k.
   C'est une plaque polygônale $\mathcal{P}$ incluse dans le disque de centre 0 et de rayon $|u_h|$.
   Vérifier que le point B d'affixe λA_h est un élément de $\mathcal{P}$. [S]
   (b) En déduire qu'il existe un entier m compris entre 1 et n tel que $\lambda^m = 1$. [S]
7. Dans cette question, on suppose que $\varepsilon = \min\{m_{i,j}, 1 \leq i, j \leq n\}$ est strictement positif.
   On s'intéresse à la suite des puissances M^k de M. On note $m_{i,j}^{(k)}$ le terme général de M^k.
   Pour tout j de $\{1, \ldots, n\}$, on pose : $\begin{cases} \alpha_j^{(k)} = \min\{m_{i,j}^{(k)}, 1 \leq i \leq n\} \\ \beta_j^{(k)} = \max\{m_{i,j}^{(k)}, 1 \leq i \leq n\} \end{cases}$
   Dans les questions (a) à (d), j est fixé dans $\{1, \ldots, n\}$ et k est fixé dans $\mathbb{N}$.

(a) Prouver que $\alpha_j^{(k)} \leq \alpha_j^{(k+1)} \leq \beta_j^{(k+1)} \leq \beta_j^{(k)}$. [S]

(b) Montrer qu'il existe un couple (i_0, j_0) tel que $\alpha_j^{(k+1)} - \alpha_j^{(k)} \geq m_{i_0,j_0}(\beta_j^{(k)} - \alpha_j^{(k)})$. [S]

(c) Montrer qu'il existe un couple (i_1, j_1) tel que $\beta_j^{(k)} - \beta_j^{(k+1)} \geq m_{i_1,j_1}(\beta_j^{(k)} - \alpha_j^{(k)})$ [S]

(d) En déduire que $\beta_j^{(k+1)} - \alpha_j^{(k+1)} \leq (1 - 2\varepsilon)(\beta_j^{(k)} - \alpha_j^{(k)})$ [S]

(e) Montrer que la suite $(M^k)_{k\geq 0}$ converge vers une matrice B de E_n dont toutes les lignes sont identiques. [S]

(f) Vérifier ce résultat avec la matrice $M = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 1/6 & 1/2 \end{pmatrix}$ [S]