Matrices stochastiques

On note E_n le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices $M = (m_{ij})$ telles que :
– Pour tous indices i et j de $\{1, \dots, n\}$, $m_{ij} \geq 0$.
– Pour tout indice i de $\{1, \dots, n\}$, $\sum_{j=1}^{n} m_{ij} = 1$.

1. Montrer que l'ensemble E_n est non vide et qu'il est stable pour le produit des matrices. [S]
2. Dans toute la suite du problème, M est un élément quelconque de E_n.
   Montrer que 1 est valeur propre de M, et indiquer un vecteur propre associé très simple. [S]
3. Soit λ une valeur propre réelle ou complexe de M.
   On note u un vecteur propre associé, réel ou complexe.
   On note $u_1, u_2, \dots, u_n$ les composantes successives de u.
   (a) Soit h un indice de $\{1, \dots, n\}$ tel que $|u_h| = \max\{|u_j|, 1 \leq j \leq n\}$.
   Montrer que $|\lambda - m_{hh}| \leq 1 - m_{hh}$. En déduire que $|\lambda| \leq 1$. [S]
   (b) Soit $d = \min\{m_{jj}, 1 \leq j \leq n\}$. Montrer que $|\lambda - d| \leq 1 - d$.
   Donner une interprétation géométrique de ce résultat.
   Montrer que si $d > 0$, alors 1 est la seule valeur propre de M de module 1. [S]
4. Montrer que si $m_{jj} > \frac{1}{2}$ pour tout indice j de $\{1, \dots, n\}$, alors M est inversible. [S]
5. On suppose que pour tous indices (i, j) de $\{1, \dots, n\}$, m_{ij} est strictement positif.
   Montrer que la matrice $M - I_n$ est de rang $n - 1$.
   Indication : si le vecteur réel $u = (u_1, \dots, u_n)$ est dans $\ker(M - I_n)$, utiliser la composante u_i qui est minimum. [S]
6. Dans cette question, λ est une valeur propre de module 1 de M.
   On va montrer que λ est une racine m-ième de l'unité, avec $1 \leq m \leq n$.
   Pour cela, on note $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ un vecteur propre réel ou complexe de M pour λ.
   Soit h un indice de $\{1, \dots, n\}$ tel que $|u_h| = \max\{|u_j|, 1 \leq j \leq n\}$.
   (a) Montrer qu'il existe un indice k de $\{1, \dots, n\}$ tel que $\lambda u_h = u_k$.
   Indication : considérer l'enveloppe convexe des points A_k d'affixes u_k.
   C'est une plaque polygônale $\mathcal{P}$ incluse dans le disque de centre 0 et de rayon $|u_h|$.
   Vérifier que le point B d'affixe λA_h est un élément de $\mathcal{P}$. [S]
   (b) En déduire qu'il existe un entier m compris entre 1 et n tel que $\lambda^m = 1$. [S]
7. Dans cette question, on suppose que $\varepsilon = \min\{m_{i,j}, 1 \leq i, j \leq n\}$ est strictement positif.
   On s'intéresse à la suite des puissances M^k de M. On note $m_{i,j}^{(k)}$ le terme général de M^k.
   Pour tout j de $\{1, \dots, n\}$, on pose : $\begin{cases} \alpha_j^{(k)} = \min\{m_{i,j}^{(k)}, 1 \leq i \leq n\} \\ \beta_j^{(k)} = \max\{m_{i,j}^{(k)}, 1 \leq i \leq n\} \end{cases}$
   Dans les questions (a) à (d), j est fixé dans $\{1, \dots, n\}$ et k est fixé dans $\mathbb{N}$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 6 pages.

(a) Prouver que $\alpha_j^{(k)} \leq \alpha_j^{(k+1)} \leq \beta_j^{(k+1)} \leq \beta_j^{(k)}$. [S]

(b) Montrer qu'il existe un couple (i_0, j_0) tel que $\alpha_j^{(k+1)} - \alpha_j^{(k)} \geq m_{i_0,j_0}(\beta_j^{(k)} - \alpha_j^{(k)})$. [S]

(c) Montrer qu'il existe un couple (i_1, j_1) tel que $\beta_j^{(k)} - \beta_j^{(k+1)} \geq m_{i_1,j_1}(\beta_j^{(k)} - \alpha_j^{(k)})$ [S]

(d) En déduire que $\beta_j^{(k+1)} - \alpha_j^{(k+1)} \leq (1 - 2\varepsilon)(\beta_j^{(k)} - \alpha_j^{(k)})$ [S]

(e) Montrer que la suite $(M^k)_{k\geq 0}$ converge vers une matrice B de E_n dont toutes les lignes sont identiques. [S]

(f) Vérifier ce résultat avec la matrice $M = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 1/6 & 1/2 \end{pmatrix}$ [S]

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 6 pages.