

## Quaternions

On se place dans l'algèbre  $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$  et on définit les quatre matrices suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Former le polynôme caractéristique de  $J$ .  
Cette matrice est-elle diagonalisable dans  $\mathbb{R}$  ? dans  $\mathbb{C}$  ? [S]
  - Reprendre la question (a) avec la matrice  $K$ . [S]
  - Reprendre la question (a) avec la matrice  $L$ . [S]
- Montrer que  $G = \{I, J, K, L, -I, -J, -K, -L\}$  est un sous-groupe non commutatif, pour le produit des matrices, du groupe  $\mathcal{GL}_4(\mathbb{R})$  des matrices inversibles d'ordre 4. [S]
- Soient  $a, b, c, d$  quatre nombres complexes, et  $A = aJ + bK + cL + dI$ .
  - Déduire de ce qui précède une expression de  $A^2$  en fonction de  $A$  et de  $I$ . [S]
  - Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur  $a, b, c, d$  pour que la matrice  $A^2$  soit diagonale. Quelle est alors son expression en fonction de  $I$  ? [S]
  - On note  $A_0$  la matrice  $A$  obtenue pour  $d = 0$ . Calculer  $\det A_0^2$  et en déduire  $\det A_0$ . [S]
- Déterminer le polynôme caractéristique de  $A$  en considérant le produit de la matrice  $A - \lambda I$  (avec  $\lambda \in \mathbb{C}$ ) par sa transposée. [S]
  - En déduire les valeurs propres de  $A$  et exprimer  $\det A$  en fonction de  $a, b, c, d$ . [S]
  - Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur  $a, b, c, d$  pour que  $A$  admette une valeur propre quadruple. [S]
  - Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur  $a, b, c, d$  pour que les valeurs propres de  $A$  soient  $-i$  et  $i$ . [S]
- Donner une condition nécessaire et suffisante sur  $a, b, c, d$  pour que  $A$  soit inversible. [S]
- On pose  $\omega = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$  et on suppose que  $A$  est inversible.
  - Calculer  $\det A^{-1}$  et déterminer  $A^{-1}$  en effectuant le produit  $A^T A$ . [S]
  - Déterminer les valeurs propres de  $A^{-1}$ . [S]
  - Calculer le polynôme caractéristique de  $A^{-1}$ . [S]
- Soit  $E$  l'ensemble des matrices  $A$ , quand  $(a, b, c, d)$  décrit  $\mathbb{C}^4$ .
  - Montrer que  $E$  est une algèbre non commutative possédant des diviseurs de zéro. [S]
  - Donner une condition nécessaire et suffisante pour que  $A, A'$  commutent dans  $E$ . [S]
- Soit  $F$  l'ensemble des matrices  $A$ , quand  $(a, b, c, d)$  décrit  $\mathbb{R}^4$ .  
Montrer que toute matrice non nulle de  $F$  est inversible dans  $F$ . [S]