Quaternions

On se place dans l'algèbre $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ et on définit les quatre matrices suivantes :

$$I=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\ J=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\ K=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\-1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}\ L=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix}$$

1. (a) Former le polynôme caractéristique de J.
   Cette matrice est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$? dans $\mathbb{C}$? [S]
   (b) Reprendre la question (a) avec la matrice K. [S]
   (c) Reprendre la question (a) avec la matrice L. [S]
2. Montrer que $G=\{I,J,K,L,-I,-J,-K,-L\}$ est un sous-groupe non commutatif, pour le produit des matrices, du groupe $\mathcal{GL}_4(\mathbb{R})$ des matrices inversibles d'ordre 4. [S]
3. Soient a,b,c,d quatre nombres complexes, et $A=aJ+bK+cL+dI$.
   (a) Déduire de ce qui précède une expression de A^2 en fonction de A et de I. [S]
   (b) Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur a,b,c,d pour que la matrice A^2 soit diagonale. Quelle est alors son expression en fonction de I ? [S]
   (c) On note A_0 la matrice A obtenue pour $d=0$. Calculer $\det A_0^2$ et en déduire $\det A_0$. [S]
4. (a) Déterminer le polynôme caractéristique de A en considérant le produit de la matrice $A-\lambda I$ (avec $\lambda\in\mathbb{C}$) par sa transposée. [S]
   (b) En déduire les valeurs propres de A et exprimer $\det A$ en fonction de a,b,c,d. [S]
   (c) Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur a,b,c,d pour que A admette une valeur propre quadruple. [S]
   (d) Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur a,b,c,d pour que les valeurs propres de A soient $-i$ et i. [S]
5. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a,b,c,d pour que A soit inversible. [S]
6. On pose $\omega=a^2+b^2+c^2+d^2$ et on suppose que A est inversible.
   (a) Calculer $\det A^{-1}$ et déterminer A^{-1} en effectuant le produit ${}^{\mathrm{T}}AA$. [S]
   (b) Déterminer les valeurs propres de A^{-1}. [S]
   (c) Calculer le polynôme caractéristique de A^{-1}. [S]
7. Soit E l'ensemble des matrices A, quand (a,b,c,d) décrit $\mathbb{C}^4$.
   (a) Montrer que E est une algèbre non commutative possédant des diviseurs de zéro. [S]
   (b) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A,A' commutent dans E. [S]
8. Soit F l'ensemble des matrices A, quand (a,b,c,d) décrit $\mathbb{R}^4$.
   Montrer que toute matrice non nulle de F est inversible dans F. [S]

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 4 pages.