

Moindres carrés discrets

Soit n un entier positif.

On note $(u, v) \mapsto \langle u, v \rangle$ le produit scalaire canonique sur \mathbb{R}^n , et $u \mapsto \|u\|$ la norme associée.

On considère un “nuage” $\mathcal{N} = (x_i, y_i)_{0 \leq i \leq n-1}$ de n points (x_i, y_i) de \mathbb{R}^2 , et on suppose que les abscisses de ces points sont deux à deux distinctes.

Soit m un entier naturel. On considère le problème suivant :

\mathcal{P}_m : Trouver un polynôme A , avec $\deg A \leq m$, qui minimise $J(A) = \sum_{i=0}^{n-1} (A(x_i) - y_i)^2$.

On dit que A , s’il existe, est la meilleure approximation de \mathcal{N} au sens des moindres carrés.

- On suppose $m \geq n - 1$. Rappeler pourquoi le problème \mathcal{P}_m admet une solution A .
Quelle est alors la valeur de $J(A)$? Cette solution est-elle unique?
Dans toute la suite, on suppose que m est inférieur ou égal à $n - 1$. [S]
- (a) En évaluant $J(A + \lambda B) - J(A)$ (pour tout réel λ , et tous A, B de $\mathbb{R}_m[X]$), montrer que A est solution de \mathcal{P}_m si et seulement si : $\forall B \in \mathbb{R}_m[X], \sum_{i=0}^{n-1} B(x_i)(A(x_i) - y_i) = 0$. [S]
(b) En déduire l’unicité (si existence) de la solution de \mathcal{P}_m . [S]

Soit $\varepsilon = (P_0, P_1, \dots, P_m)$ une base de $\mathbb{R}_m[X]$. On note :

- $[A]$ le vecteur-colonne des composantes a_0, \dots, a_m de A dans cette base.
 - $[y]$ le vecteur-colonne des ordonnées y_0, y_1, \dots, y_{n-1} .
 - M la matrice, de type $n \times (m + 1)$, de terme général $m_{i,j} = P_{j-1}(x_{i-1})$.
- (a) Montrer que A est solution de \mathcal{P}_m si et seulement si ${}^T M M [A] = {}^T M [y]$. [S]
(b) Montrer que ${}^T M M$ est inversible. En déduire que \mathcal{P}_m a une solution unique A . [S]
(c) Montrer qu’alors $J(A) = {}^T [y] N [y]$, avec $N = I_n - M ({}^T M M)^{-1} {}^T M$. [S]
(d) Vérifier qu’on retrouve bien $J(A) = 0$ quand $m = n - 1$. [S]
 - On va retrouver les résultats précédents en adoptant un point de vue plus géométrique.
Soit φ linéaire de matrice M , de $\mathbb{R}_m[X]$ muni de ε vers \mathbb{R}^n muni de la base canonique.
 - Vérifier que φ est injective. [S]
 - Montrer que \mathcal{P}_m équivaut à trouver A dans $\mathbb{R}_m[X]$ dont l’image par φ est la projection orthogonale de $y = (y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$ sur $\text{Im } \varphi$.
Retrouver ainsi le résultat de la question (3a). [S]
 - Géométriquement, que représente la matrice $M' = M ({}^T M M)^{-1} {}^T M$?
Retrouver ainsi le résultat de la question 3c). [S]
 - (a) Déterminer A quand $m = 0$. Que vaut alors $J(A)$? [S]



(b) Dans cette question, on suppose $m = 1$.

Pour simplifier les notations, on posera :

$$\sum_{i=0}^{n-1} x_i = \Sigma_x = n \bar{x}, \quad \sum_{i=0}^{n-1} x_i^2 = \Sigma_{x^2} = n \overline{x^2}$$
$$\sum_{i=0}^{n-1} y_i = \Sigma_y = n \bar{y}, \quad \sum_{i=0}^{n-1} x_i y_i = \Sigma_{xy} = n \overline{xy}$$

On note $V_x = \overline{x^2} - \bar{x}^2$ la *variance* des x_i .

On note enfin $\text{cov}_{xy} = \overline{xy} - \bar{x} \bar{y}$ la *covariance* des (x_i, y_i) .

Montrer que la solution de \mathcal{P}_m est $A = a_1 X + a_0$, où $a_1 = \frac{\text{cov}_{xy}}{V_x}$ et $a_0 = \bar{y} - a_1 \bar{x}$. [S]