Familles obtusangles ou acutangles

NB : Pour la définition des matrices de Gram, voir le problème consacré à ces matrices.

E est un espace euclidien de dimension $n \geq 1$.

On note $< u, v >$ le produit scalaire de deux vecteurs u et v de E, et $\|u\|$ la norme associée.

Partie I : Familles strictement obtusangles

Soit $(u) = u_1, \ldots, u_m$ une famille de m vecteurs de E.

On dit que (u) est *obtusangle* si pour tous indices i, j distincts de $\{1, \ldots, m\}$, $< u_i, u_j > \leq 0$.

On que cette famille est *acutangle* si pour tous i, j distincts, on a $< u_i, u_j > \geq 0$.

On définit de même les familles :
– strictement obtusangles (inégalités $< u_i, u_j > < 0$ pour $i \neq j$)
– strictement acutangles (inégalités $< u_i, u_j > > 0$ pour $i \neq j$).

1. Soit $u_1, \ldots, u_m$ une famille strictement obtusangle et liée.

   existe donc m scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, non tous nuls, tels que $\sum_{k=1}^{m} \lambda_k u_k = 0$.

   Quitte à remplacer ces scalaires par leurs opposés, on peut supposer que l'un au moins des λ_k est strictement positif. On va montrer qu'alors *tous* les λ_k sont strictement positifs.

   On note I l'ensemble (non vide) des indices i de $\{1, \ldots, m\}$ tels que $\lambda_i > 0$.

   Soit J le complémentaire de I dans $\{1, \ldots, m\}$. On suppose par l'absurde $J \neq \emptyset$.

   L'égalité $\sum_{k=1}^{m} \lambda_k u_k = 0$ s'écrit alors $\sum_{i \in I} \lambda_i u_i = \sum_{j \in J} (-\lambda_j) u_j$.

   Soit v le vecteur de E désigné par cette égalité.

   (a) Montrer que v est nul. [S]

   (b) Soit j un élément de J. Considérer $< v, u_j >$ et conclure. [S]

2. Déduire de ce qui précède qu'une famille strictement obtusangle de m vecteurs est de rang m ou de rang $m-1$, et que toute famille strictement obtusangle de E est nécessairement formée d'au plus $n+1$ vecteurs. [S]

3. Dans cette question on va prouver qu'il existe effectivement dans E des familles strictement obtusangles et de cardinal $n+1$.

   On va même montrer qu'il existe une famille $u_0, u_1, \ldots, u_n$ formée de $n+1$ vecteurs unitaires, et telle que les produits scalaires $< u_i, u_j >$ (pour tous indices i, j distincts) soient égaux à une même quantité strictement négative c.

   Pour la commodité de la notation, une telle famille de E sera dite "spéciale".

   (a) Montrer que si une telle famille existe, alors $u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \overrightarrow{0}$ et $c = -\frac{1}{n}$. [S]

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 8 pages.

(b) On va construire une telle famille $u_0, \dots, u_n$ par récurrence sur $n = \dim E$.
Montrer qu'une telle famille existe quand $n = 1$ ou quand $n = 2$. [S]

(c) On suppose qu'en dimension $n-1$, il existe des familles "spéciales" $v_0, \dots, v_{n-1}$.
D'après (a), les produits scalaires deux à deux des vecteurs v_k sont égaux à $-\dfrac{1}{n-1}$.
Montrer qu'il existe une famille spéciale $u_0, \dots, u_n$ dans E. Conclure. [S]

4. Montrer que toute sous-famille de n vecteurs extraits d'une même famille "spéciale" $(u) = u_0, u_1, \dots, u_n$ de E est une base de E. [S]
5. Dans cette question, on prouve que les familles "spéciales" de E sont les images de l'une d'entre elles par les endomorphismes orthogonaux de E.

(a) Montrer que si $u_0, \dots, u_n$ est une famille "spéciale" de E, et si f est un endomorphisme orthogonal de E, alors la famille $v_k = f(u_k)$ est encore "spéciale". [S]

(b) Réciproquement, soient $(u) = u_0, \dots, u_n$ et $(v) = v_0, \dots, v_n$ deux familles "spéciales".

i. Montrer qu'il existe un unique $f \in \mathcal{L}(E)$ tq : $\forall j \in \{0, \dots, n-1\}, f(u_j) = v_j$. [S]

ii. Montrer alors que $f(u_n) = v_n$. [S]

iii. Etablir que f est un endomorphisme orthogonal de E. [S]

Partie II : Bases associées

Dans cette partie E est un espace euclidien de dimension $n \geq 1$.

1. Soit $(e) = e_1, \dots, e_n$ une base de E. Montrer qu'il existe une base unique $(\widehat{e}) = \widehat{e_1}, \dots, \widehat{e_n}$ de E telle que, pour tous indices i de j, $< \widehat{e_i}, e_j > = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$.
On dira alors que $(\widehat{e})$ est la base *associée* à (e). Ces deux bases jouant le même rôle dans les égalités précédentes, il est clair que (e) est la base associée à $(\widehat{e})$. [S]
2. Quelles sont les bases de E qui sont leur propre associée ? [S]
3. Soit x un vecteur de E. Montrer que les composantes x_i de x dans la base (e) sont les produits scalaires $< \widehat{e_i}, x >$ de x avec les vecteurs de la base associée $(\widehat{e})$.
Autrement dit les coordonnées contravariantes d'un vecteur dans une base sont les coordonnées covariantes de ce vecteur dans la base associée. [S]
4. Soient x et y deux vecteurs de E. On note x_i, y_i leurs composantes dans la base (e) et $\widehat{x_i}, \widehat{y_i}$ leurs composantes dans la base $(\widehat{e})$ (dans les deux cas, ce sont les composantes au sens usuel, c'est-à-dire les coordonnées contravariantes.)
Exprimer très simplement $< x, y >$ et $\|x\|^2$ en fonction de ces composantes. [S]
5. On note G la matrice de Gram de la base (e) et $\widehat{G}$ celle de la base associée $(\widehat{e})$.
Interpréter G et $\widehat{G}$ comme des matrices de passage. En déduire que $\widehat{G} = G^{-1}$. [S]

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 8 pages.

6. Dans cette question, on suppose que la base (e) est obtusangle.
On va montrer que la base associée $(\widehat{e})$ est acutangle.
On pose $\alpha = \sum_{j=1}^{n} \|e_j\|^2$, et on définit la matrice $A = I_n - \frac{1}{\alpha} G$.
   (a) Montrer que A est à coefficients positifs ou nuls. [S]
   (b) Montrer que A et G sont diagonalisables à l'aide d'une même matrice de passage. [S]
   (c) Montrer que les valeurs propres de A sont dans $[0, 1[$ (utiliser la question I-3). [S]
   (d) Montrer que la suite des $B_m = I_n + A + A^2 + \cdots + A^m$ converge vers αG^{-1}.
   Indication : utiliser une réduite de A à la forme diagonale. [S]
   (e) Déduire de ce qui précède que la base $(\widehat{e})$ est acutangle. [S]

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 8 pages.