Familles obtusangles ou acutangles

NB : Pour la définition des matrices de Gram, voir le problème consacré à ces matrices.

E est un espace euclidien de dimension $n \geq 1$.

On note $< u, v >$ le produit scalaire de deux vecteurs u et v de E, et $\|u\|$ la norme associée.

Partie I : Familles strictement obtusangles

Soit $(u) = u_1, \ldots, u_m$ une famille de m vecteurs de E.

On dit que (u) est *obtusangle* si pour tous indices i, j distincts de $\{1, \ldots, m\}$, $< u_i, u_j > \leq 0$.

On que cette famille est *acutangle* si pour tous i, j distincts, on a $< u_i, u_j > \geq 0$.

On définit de même les familles :
- strictement obtusangles (inégalités $< u_i, u_j > < 0$ pour $i \neq j$)
- strictement acutangles (inégalités $< u_i, u_j > > 0$ pour $i \neq j$).

1. Soit $u_1, \ldots, u_m$ une famille strictement obtusangle et liée.

   existe donc m scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, non tous nuls, tels que $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} \lambda_k u_k = 0$.
   Quitte à remplacer ces scalaires par leurs opposés, on peut supposer que l'un au moins des λ_k est strictement positif. On va montrer qu'alors *tous* les λ_k sont strictement positifs.
   On note I l'ensemble (non vide) des indices i de $\{1, \ldots, m\}$ tels que $\lambda_i > 0$.
   Soit J le complémentaire de I dans $\{1, \ldots, m\}$. On suppose par l'absurde $J \neq \emptyset$.
   L'égalité $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} \lambda_k u_k = 0$ s'écrit alors $\displaystyle\sum_{i \in I} \lambda_i u_i = \sum_{j \in J} (-\lambda_j) u_j$.
   Soit v le vecteur de E désigné par cette égalité.

   (a) Montrer que v est nul. [S]

   (b) Soit j un élément de J. Considérer $< v, u_j >$ et conclure. [S]

2. Déduire de ce qui précède qu'une famille strictement obtusangle de m vecteurs est de rang m ou de rang $m - 1$, et que toute famille strictement obtusangle de E est nécessairement formée d'au plus $n + 1$ vecteurs. [S]

3. Dans cette question on va prouver qu'il existe effectivement dans E des familles strictement obtusangles et de cardinal $n + 1$.
   On va même montrer qu'il existe une famille $u_0, u_1, \ldots, u_n$ formée de $n + 1$ vecteurs unitaires, et telle que les produits scalaires $< u_i, u_j >$ (pour tous indices i, j distincts) soient égaux à une même quantité strictement négative c.
   Pour la commodité de la notation, une telle famille de E sera dite “spéciale”.

   (a) Montrer que si une telle famille existe, alors $u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \overrightarrow{0}$ et $c = -\dfrac{1}{n}$. [S]

(b) On va construire une telle famille $u_0, \ldots, u_n$ par récurrence sur $n = \dim E$.
Montrer qu'une telle famille existe quand $n = 1$ ou quand $n = 2$. [S]

(c) On suppose qu'en dimension $n-1$, il existe des familles "spéciales" $v_0, \ldots, v_{n-1}$.
D'après (a), les produits scalaires deux à deux des vecteurs v_k sont égaux à $-\dfrac{1}{n-1}$.
Montrer qu'il existe une famille spéciale $u_0, \ldots, u_n$ dans E. Conclure. [S]

4. Montrer que toute sous-famille de n vecteurs extraits d'une même famille "spéciale" $(u) = u_0, u_1, \ldots, u_n$ de E est une base de E. [S]

5. Dans cette question, on prouve que les familles "spéciales" de E sont les images de l'une d'entre elles par les endomorphismes orthogonaux de E.

   (a) Montrer que si $u_0, \ldots, u_n$ est une famille "spéciale" de E, et si f est un endomorphisme orthogonal de E, alors la famille $v_k = f(u_k)$ est encore "spéciale". [S]

   (b) Réciproquement, soient $(u) = u_0, \ldots, u_n$ et $(v) = v_0, \ldots, v_n$ deux familles "spéciales".

      i. Montrer qu'il existe un unique $f \in \mathcal{L}(E)$ tq : $\forall j \in \{0, \ldots, n-1\}, f(u_j) = v_j$. [S]

      ii. Montrer alors que $f(u_n) = v_n$. [S]

      iii. Etablir que f est un endomorphisme orthogonal de E. [S]

Partie II : Bases associées

Dans cette partie E est un espace euclidien de dimension $n \geq 1$.

1. Soit $(e) = e_1, \ldots, e_n$ une base de E. Montrer qu'il existe une base unique $(\widehat{e}) = \widehat{e_1}, \ldots, \widehat{e_n}$ de E telle que, pour tous indices i de j, $< \widehat{e_i}, e_j > = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$.
   On dira alors que $(\widehat{e})$ est la base *associée* à (e). Ces deux bases jouant le même rôle dans les égalités précédentes, il est clair que (e) est la base associée à $(\widehat{e})$. [S]

2. Quelles sont les bases de E qui sont leur propre associée ? [S]

3. Soit x un vecteur de E. Montrer que les composantes x_i de x dans la base (e) sont les produits scalaires $< \widehat{e_i}, x >$ de x avec les vecteurs de la base associée $(\widehat{e})$.
   Autrement dit les coordonnées contravariantes d'un vecteur dans une base sont les coordonnées covariantes de ce vecteur dans la base associée. [S]

4. Soient x et y deux vecteurs de E. On note x_i, y_i leurs composantes dans la base (e) et $\widehat{x_i}, \widehat{y_i}$ leurs composantes dans la base $(\widehat{e})$ (dans les deux cas, ce sont les composantes au sens usuel, c'est-à-dire les coordonnées contravariantes.)
   Exprimer très simplement $< x, y >$ et $\|x\|^2$ en fonction de ces composantes. [S]

5. On note G la matrice de Gram de la base (e) et $\widehat{G}$ celle de la base associée $(\widehat{e})$.
   Interpréter G et $\widehat{G}$ comme des matrices de passage. En déduire que $\widehat{G} = G^{-1}$. [S]

6. Dans cette question, on suppose que la base (e) est obtusangle.
   On va montrer que la base associée $(\widehat{e})$ est acutangle.
   On pose $\alpha = \sum_{j=1}^{n} \|e_j\|^2$, et on définit la matrice $A = I_n - \dfrac{1}{\alpha} G$.
   (a) Montrer que A est à coefficients positifs ou nuls. [S]
   (b) Montrer que A et G sont diagonalisables à l'aide d'une même matrice de passage. [S]
   (c) Montrer que les valeurs propres de A sont dans $[0,1[$ (utiliser la question I-3). [S]
   (d) Montrer que la suite des $B_m = I_n + A + A^2 + \cdots + A^m$ converge vers αG^{-1}.
   Indication : utiliser une réduite de A à la forme diagonale. [S]
   (e) Déduire de ce qui précède que la base $(\widehat{e})$ est acutangle. [S]