

## Produit scalaire sur des matrices $2 \times 2$

D'après Maths II, filière PC, Centrale-Supélec 1998

Si  $A$  est une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $\text{tr}(A)$  désigne la trace de  $A$ .

On pourra utiliser, sans démonstration, le résultat suivant : si  $A$  est une matrice de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$  et  $B$  une matrice de  $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ , on a  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ .

Le problème porte sur des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels.

L'ensemble de ces matrices sera noté  $\mathcal{M}$ .

On notera  $E$  la matrice unité :  $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

On désignera par  $\mathcal{B}$  la base canonique de  $\mathcal{M}$ , constituée des matrices suivantes :

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On note  $\mathcal{D}$  l'ensemble des matrices scalaires, c'est-à-dire de la forme  $aE$ , avec  $a$  réel.

On désigne par  $\mathcal{N}$  l'ensemble des matrices  $A$  de  $\mathcal{M}$  dont la trace est nulle.

On note  $s(A)$  la "matrice complémentaire" de la matrice  $A$ , qui est par définition la transposée de la matrice des cofacteurs de  $A$ .

L'espace vectoriel  $\mathbb{R}^2$  est identifié à l'espace des matrices colonnes  $M_{2,1}(\mathbb{R})$  et il est muni de sa structure euclidienne canonique pour laquelle le produit scalaire des vecteurs  $X$  et  $Y$  est donné par  ${}^tXY$ . La norme associée est notée  $X \mapsto \|X\|$ .

Dans  $\mathcal{M}$ , on note  $\mathcal{A}$  l'ensemble des matrices antisymétriques,  $\mathcal{S}$  celui des matrices symétriques, et  $\mathcal{U}$  celui des matrices orthogonales.

On désigne enfin par  $\mathcal{S}^+$  l'ensemble des matrices symétriques positives, c'est-à-dire l'ensemble des matrices  $A$  de  $\mathcal{S}$  qui vérifient  ${}^tXAX \geq 0$  quel que soit  $X$  dans  $\mathbb{R}^2$ .

Les parties (A) et (B) sont, dans une large mesure, indépendantes.

### Partie A

- (a) Montrer que  $s$  est un endomorphisme de  $\mathcal{M}$  et donner sa matrice dans la base  $\mathcal{B}$ . [S]  
(b) Montrer que les matrices suivantes constituent une base de  $\mathcal{M}$ ;

$$E = B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

[S]

- (c) Donner la matrice de  $s$  dans cette base. [S]  
 (d) Déterminer  $s \circ s$ . [S]
2. (a) Montrer que  $s(MN) = s(N)s(M)$ . [S]  
 (b) Comparer, lorsque cela est possible,  $s(M^{-1})$  et  $s(M)^{-1}$ . [S]  
 (c) Pour  $A$  appartenant à  $\mathcal{M}$ , établir la relation  $s(A) = -A + \text{tr}(A)E$ . [S]  
 (d) Montrer que si  $A$  est semblable à  $B$ , alors  $s(A)$  est semblable à  $s(B)$ . [S]
3. (a) Montrer que  $\mathcal{N}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}$  et préciser sa dimension. [S]  
 (b) Montrer que  $\mathcal{N}$  et  $\mathcal{D}$  sont des sous-espaces supplémentaires de  $\mathcal{M}$ . [S]

## Partie B

Pour  $M$  et  $N$  dans  $\mathcal{M}$ , on pose  $\langle M, N \rangle = \text{tr}(M^T N)$ .

1. (a) Montrer qu'on définit ainsi un produit scalaire sur  $\mathcal{M}$ . Préciser la norme associée. [S]  
 (b) Montrer que les sous-espaces  $\mathcal{N}$  et  $\mathcal{D}$  sont supplémentaires orthogonaux l'un de l'autre pour ce produit scalaire. [S]  
 (c) Montrer qu'il en est de même pour les sous-espaces  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{S}$ . [S]  
 (d) Montrer que pour toute matrice  $A$  de  $\mathcal{M}$  et tous vecteurs  $X, Y$  de  $\mathbb{R}^2$ , on a les égalités  $\langle A, X^T Y \rangle = {}^T X A Y = {}^T Y^T A X$ . [S]
2. Soient  $X$  et  $Y$  deux vecteurs formant une base orthonormée de  $\mathbb{R}^2$ , et  $\alpha$  un réel. On définit les matrices  $P$  et  $Q(\alpha)$  de  $\mathcal{M}$  par :
- $$\begin{cases} P = E - 2X^T X \\ Q(\alpha) = E - 2\sin^2(\alpha)(X^T X + Y^T Y) + \sin(2\alpha)(X^T Y - Y^T X) \end{cases}$$
- Pour les commodités de la rédaction, on identifiera  $P$  et  $Q$  à des endomorphismes de  $\mathbb{R}^2$ .
- (a) Montrer que  $X^T X + Y^T Y = E$ . En déduire une expression plus simple de  $Q$ . [S]  
 (b) Montrer que  ${}^T Q(\alpha) = Q(-\alpha)$ . [S]  
 (c) Montrer que  $P$  est dans  $\mathcal{U}$ . En donner une interprétation géométrique. [S]  
 (d) Même question avec la matrice  $Q(\alpha)$ . [S]
3. Soit  $A$  une matrice de  $\mathcal{M}$  telle que pour toute matrice  $\Omega$  de  $\mathcal{U}$ , on ait  $\langle A, E - \Omega \rangle \geq 0$ .
- (a) En utilisant une certaine matrice  $\Omega$ , montrer que  ${}^T X A X \geq 0$  pour tout  $X$  de  $\mathbb{R}^2$ . [S]  
 (b) En utilisant des matrices  $Q(\alpha)$  montrer que pour toute base orthonormée  $X, Y$  de  $\mathbb{R}^2$ , on a l'égalité des réels  ${}^T X A Y = {}^T Y A X$ . [S]  
 (c) En déduire que  $A$  est dans  $\mathcal{S}^+$  (utiliser une base orthonormée particulière de  $\mathbb{R}^2$ ). [S]
4. Dans toute la question,  $A$  est un élément de  $\mathcal{S}^+$ .
- (a) Montrer que les valeurs propres et la trace de  $A$  sont positives ou nulles. [S]  
 (b) Montrer que pour toute matrice  $C$  de  $\mathcal{M}$ ,  $C' = {}^T C A C$  est un élément de  $\mathcal{S}^+$ . [S]  
 (c) Montrer que pour tout  $\Omega$  de  $\mathcal{U}$ , on a  $2 \langle A, E - \Omega \rangle = \text{tr}({}^T(\Omega - E)A(\Omega - E))$ . [S]



- (d) En déduire que pour toute matrice  $\Omega$  de  $\mathcal{U}$ , on a  $\langle A, E - \Omega \rangle \geq 0$ . [S]
- (e) Que conclure des question 3 et 4? [S]
5. Dans cette question,  $A$  est un élément de  $\mathcal{S}^+$  et  $\Omega$  est un élément de  $\mathcal{U}$ .
- (a) Montrer que  $\Omega A = A \Leftrightarrow A\Omega = A$ . [S]
- (b) Montrer que  $A\Omega = A \Rightarrow \langle A, E - \Omega \rangle = 0$ . [S]
- (c) Montrer qu'il existe une matrice symétrique  $B$  telle que  $A = B^2$ .  
On pourra pour cela diagonaliser  $A$ . [S]
- (d) En déduire que  $\langle A, E - \Omega \rangle = 0 \Rightarrow B\Omega = B \Rightarrow A\Omega = A$ . [S]
- (e) Montrer que  $\text{tr}(A\Omega) \leq \text{tr}(A)$ , et qu'on a l'égalité si et seulement si  $A\Omega = A$ . [S]