Produit scalaire sur des matrices 2×2

D'après Maths II, filière PC, Centrale-Supélec 1998

Si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\text{tr}\,(A)$ désigne la trace de A.
On pourra utiliser, sans démonstration, le résultat suivant : si A est une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et B une matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, on a $\text{tr}\,(AB) = \text{tr}\,(BA)$.

Le problème porte sur des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels.
L'ensemble de ces matrices sera noté $\mathcal{M}$.

On notera E la matrice unité : $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

On désignera par $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathcal{M}$, constituée des matrices suivantes :

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des matrices scalaires, c'est-à-dire de la forme aE, avec a réel.

On désigne par $\mathcal{N}$ l'ensemble des matrices A de $\mathcal{M}$ dont la trace est nulle.

On note $s(A)$ la "matrice complémentaire" de la matrice A, qui est par définition la transposée de la matrice des cofacteurs de A.

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ est identifié à l'espace des matrices colonnes $M_{2,1}(\mathbb{R})$ et il est muni de sa structure euclidienne canonique pour laquelle le produit scalaire des vecteurs X et Y est donné par ${}^{\text{T}}XY$. La norme associée est notée $X \mapsto \|X\|$.

Dans $\mathcal{M}$, on note $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices antisymétriques, $\mathcal{S}$ celui des matrices symétriques, et $\mathcal{U}$ celui des matrices orthogonales.

On désigne enfin par $\mathcal{S}^+$ l'ensemble des matrices symétriques positives, c'est-à-dire l'ensemble des matrices A de $\mathcal{S}$ qui vérifient ${}^{\text{T}}XAX \geq 0$ quel que soit X dans $\mathbb{R}^2$.

Les parties (A) et (B) sont, dans une large mesure, indépendantes.

Partie A

1. (a) Montrer que s est un endomorphisme de $\mathcal{M}$ et donner sa matrice dans la base $\mathcal{B}$. [S]
   (b) Montrer que les matrices suivantes constituent une base de $\mathcal{M}$;

$$E = B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

[S]

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 8 pages.

(c) Donner la matrice de s dans cette base. [S]

(d) Déterminer $s \circ s$. [S]

2. (a) Montrer que $s(MN) = s(N)s(M)$. [S]

(b) Comparer, lorsque cela est possible, $s(M^{-1})$ et $s(M)^{-1}$. [S]

(c) Pour A appartenant à $\mathcal{M}$, établir la relation $s(A) = -A + \text{tr}\,(A)E$. [S]

(d) Montrer que si A est semblable à B, alors $s(A)$ est semblable à $s(B)$. [S]

3. (a) Montrer que $\mathcal{N}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}$ et préciser sa dimension. [S]

(b) Montrer que $\mathcal{N}$ et $\mathcal{D}$ sont des sous-espaces supplémentaires de $\mathcal{M}$. [S]

Partie B

Pour M et N dans $\mathcal{M}$, on pose $< M, N >= \text{tr}\,(M\,{}^{\text{T}}N)$.

1. (a) Montrer qu'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathcal{M}$. Préciser la norme associée. [S]

(b) Montrer que les sous-espaces $\mathcal{N}$ et $\mathcal{D}$ sont supplémentaires orthogonaux l'un de l'autre pour ce produit scalaire. [S]

(c) Montrer qu'il en est de même pour les sous-espaces $\mathcal{A}$ et $\mathcal{S}$. [S]

(d) Montrer que pour toute matrice A de $\mathcal{M}$ et tous vecteurs X, Y de $\mathbb{R}^2$, on a les égalités $< A, X\,{}^{\text{T}}Y >= {}^{\text{T}}XAY = {}^{\text{T}}Y\,{}^{\text{T}}AX$. [S]

2. Soient X et Y deux vecteurs formant une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$, et α un réel.
On définit les matrices P et $Q(\alpha)$ de $\mathcal{M}$ par :
$$\begin{cases} P = E - 2X\,{}^{\text{T}}X \\ Q(\alpha) = E - 2\sin^2(\alpha)(X\,{}^{\text{T}}X + Y\,{}^{\text{T}}Y) + \sin(2\alpha)(X\,{}^{\text{T}}Y - Y\,{}^{\text{T}}X) \end{cases}$$
Pour les commodités de la rédaction, on identifiera P et Q à des endomorphismes de $\mathbb{R}^2$.

(a) Montrer que $X\,{}^{\text{T}}X + Y\,{}^{\text{T}}Y = E$. En déduire une expression plus simple de Q. [S]

(b) Montrer que ${}^{\text{T}}Q(\alpha) = Q(-\alpha)$. [S]

(c) Montrer que P est dans $\mathcal{U}$. En donner une interprétation géométrique. [S]

(d) Même question avec la matrice $Q(\alpha)$. [S]

3. Soit A une matrice de $\mathcal{M}$ telle que pour toute matrice Ω de $\mathcal{U}$, on ait $< A, E - \Omega >\geq 0$.

(a) En utilisant une certaine matrice Ω, montrer que ${}^{\text{T}}XAX \geq 0$ pour tout X de $\mathbb{R}^2$. [S]

(b) En utilisant des matrices $Q(\alpha)$ montrer que pour toute base orthonormée X, Y de $\mathbb{R}^2$, on a l'égalité des réels ${}^{\text{T}}XAY = {}^{\text{T}}YAX$. [S]

(c) En déduire que A est dans $\mathcal{S}^+$ (utiliser une base orthonormée particulière de $\mathbb{R}^2$.) [S]

4. Dans toute la question, A est un élément de $\mathcal{S}^+$.

(a) Montrer que les valeurs propres et la trace de A sont positives ou nulles. [S]

(b) Montrer que pour toute matrice C de $\mathcal{M}$, $C' = {}^{\text{T}}CAC$ est un élément de $\mathcal{S}^+$. [S]

(c) Montrer que pour tout Ω de $\mathcal{U}$, on a $2 < A, E - \Omega >= \text{tr}\,({}^{\text{T}}(\Omega - E)A(\Omega - E))$. [S]

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 8 pages.

(d) En déduire que pour toute matrice Ω de $\mathcal{U}$, on a $< A, E - \Omega >\geq 0$. [S]

(e) Que conclure des question 3 et 4 ? [S]

5. Dans cette question, A est un élément de $\mathcal{S}^+$ et Ω est un élément de $\mathcal{U}$.

(a) Montrer que $\Omega A = A \Leftrightarrow A\Omega = A$. [S]

(b) Montrer que $A\Omega = A \Rightarrow < A, E - \Omega >= 0$. [S]

(c) Montrer qu'il existe une matrice symétrique B telle que $A = B^2$.
On pourra pour cela diagonaliser A. [S]

(d) En déduire que $< A, E - \Omega >= 0 \Rightarrow B\Omega = B \Rightarrow A\Omega = A$. [S]

(e) Montrer que $\mathrm{tr}\,(A\Omega) \leq \mathrm{tr}\,(A)$, et qu'on a l'égalité si et seulement si $A\Omega = A$. [S]

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 8 pages.