Phénomène de Gibbs

On définit une application f, 2π-périodique et impaire par : $\begin{cases} \forall x \in]0,\pi[, f(x) = 1 \\ f(0) = f(\pi) = 0 \end{cases}$

1. Montrer que le développement en série de Fourier de f est : $f(x) = \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$. [S]

2. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose : $\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}$.

   On sait donc que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ est simplement convergente vers f sur $\mathbb{R}$.

   (a) La convergence de la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$? [S]

   (b) Montrer que si $x \in \mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}$, et $n \in \mathbb{N}^*$, $T_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \sin(2k+1)x = \frac{\sin^2 nx}{\sin x}$. [S]

   (c) On se donne un réel a de $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Préciser un majorant de $|T_n(x)|$ sur $[a, \pi - a]$. [S]

   (d) Montrer que pour n dans $\mathbb{N}^*$ et x dans $[a, \pi - a]$, on a : $|f(x) - f_n(x)| \leq \dfrac{4}{n\pi \sin a}$.

   Indication : considérer $f_{n+p}(x) - f_n(x)$ (où $p \geq 2$), remarquer que $\sin(2k+1)x = T_{k+1}(x) - T_k(x)$, majorer en valeur absolue et faire tendre p vers $+\infty$. [S]

   (e) En déduire que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers f sur tout compact de $]0, \pi[$. [S]

3. Dans cette question, on étudie les variations de f_n.

   (a) Montrer que pour l'étude de f_n, on peut se ramener à l'intervalle $I = [0, \dfrac{\pi}{2}]$. [S]

   (b) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n'(x) = \dfrac{2}{\pi}\dfrac{\sin 2nx}{\sin x}$. [S]

   (c) Montrer que f_n présente un premier maximum sur I en $x_n = \dfrac{\pi}{2n}$. [S]

   (d) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x_n) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

   Indication : utiliser une somme de Riemann pour l'application $\varphi(t) = \dfrac{\sin t}{t}$. [S]

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.

Corrigé du problème

1. L'application f est 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

   En chaque discontinuité x_0, on a $f(x_0) = \frac{1}{2}(\lim\limits_{x_0^-} f + \lim\limits_{x_0^+} f)$: f est sa propre "régularisée".

   D'après le théorème de Dirichlet, f est la somme sur $\mathbb{R}$ de sa série de Fourier.

   L'application f étant impaire, sa série de Fourier est une série de "sinus".

   On a donc, pour tout x de $\mathbb{R}$: $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n(f)\sin nx$, où $b_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\sin nt\,\mathrm{d}t$.

   $\forall n \geq 1, b_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin nt\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{n}\cos nt\right]_0^\pi = \frac{2}{n\pi}(1-(-1)^n)$.

   Autrement dit : $\forall n \geq 1, b_{2n}(f) = 0$ et $\forall n \geq 0, b_{2n+1}(f) = \frac{4}{(2n+1)\pi}$.

   On en déduit : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$. [Q]

2. (a) La réponse à cette question est négative, car les applications f_n sont continues sur $\mathbb{R}$ alors que f présente des discontinuités. [Q]

   (b) On constate effectivement que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout x de $\mathbb{R}$:

   $$\begin{aligned} T_n(x)\sin x &= \sum_{k=0}^{n-1}\sin x\sin(2k+1)x = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(\cos 2kx - \cos(2k+2)x)) \\ &= \frac{1-\cos 2nx}{2} = \sin^2 nx \end{aligned}$$

   Si x appartient à $\mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}$, le résultat s'en déduit par division par $\sin x$. [Q]

   (c) Pour tout x de $[a, \pi - a]$, on a $|T_n(x)| = \frac{\sin^2 nx}{\sin x} \leq \frac{1}{\sin a}$. [Q]

   (d) Pour tous entiers n et p, et pour tout réel x :

   $$\begin{aligned} \frac{\pi}{4}(f_{n+p}(x) - f_n(x)) &= \sum_{k=n}^{n+p-1}\frac{\sin(2k+1)x}{2k+1} = \sum_{k=n}^{n+p-1}\frac{1}{2k+1}(T_{k+1}(x) - T_k(x)) \\ &= \sum_{k=n}^{n+p-1}\frac{T_{k+1}(x)}{2k+1} - \sum_{k=n}^{n+p-1}\frac{T_k(x)}{2k+1} = \sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{T_k(x)}{2k-1} - \sum_{k=n}^{n+p-1}\frac{T_k(x)}{2k+1} \\ &= \sum_{k=n+1}^{n+p-1} T_k(x)\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right) + \frac{T_{n+p}(x)}{2(n+p)-1} - \frac{T_n(x)}{2n+1} \end{aligned}$$

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.