Théorème de Dirichlet

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, de période 2π et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

On note a_k et b_k les coefficients de Fourier trigonométriques de f.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note S_n le polynôme de Fourier de f d'indice n.

On rappelle que S_n est défini par : $\forall x \in \mathbb{R}, S_n(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + \sum_{k=1}^{n} b_k \sin kx$.

On pose : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\tilde{f}(x) = \dfrac{1}{2}(f(x^-)+f(x^+))$, avec $f(x^-) = \lim\limits_{t\to x, t<x} f(t)$ et $f(x+) = \lim\limits_{t\to x, t>x} f(t)$.

L'application $\tilde{f}$ (la "régularisée" de f) coïncide donc avec f en tout point où f est continue.

Dans cette question, x est un réel donné.

1. Soit g une application continue par morceaux de $[a,b]$ dans $\mathbb{C}$ (avec $a<b$).
   Pour tout réel strictement positif t, on pose $I_t(g) = \displaystyle\int_a^b g(u)\sin tu\,du$.
   Montrer que $\lim\limits_{t\to+\infty} I_t(g) = 0$.
   Indication : on commencera par supposer que g est en escaliers sur $[a,b]$. [S]
2. On pose, pour tout u de $]0,\pi]$, $g(u) = \dfrac{1}{2\sin\frac{u}{2}}(f(x+u)+f(x-u)-2\tilde{f}(x))$.
   Montrer que g se prolonge en une application continue par morceaux sur $[0,\pi]$. [S]
3. Montrer que pour tout u de $\mathbb{R}-2\pi\mathbb{Z}$, on a l'égalité : $\dfrac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos ku = \dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{u}{2}}$. [S]
4. En déduire la valeur de l'intégrale $J_n = \displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{\sin\frac{u}{2}}\,du$. [S]
5. Montrer que $S_n(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})(x-u)}{2\sin\frac{x-u}{2}} f(u)\,du$ [S]
6. Montrer que $S_n(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{u}{2}} f(u+x)du$. [S]
7. Montrer que $S_n(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{0}^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{u}{2}} (f(u+x)+f(x-u))du$. [S]
8. En déduire que $S_n(x) - \tilde{f}(x) = \displaystyle\int_0^\pi g(u)\sin(n+\tfrac{1}{2})u\,du$ [S]
9. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x) = \tilde{f}(x)$. Conclusion ? [S]

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 4 pages.