

Théorème de Dirichlet

Soit f une application de \mathbb{R} dans \mathbb{C} , de période 2π et de classe \mathcal{C}^1 par morceaux.

On note a_k et b_k les coefficients de Fourier trigonométriques de f .

Pour tout n de \mathbb{N} , on note S_n le polynôme de Fourier de f d'indice n .

On rappelle que S_n est défini par : $\forall x \in \mathbb{R}, S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + \sum_{k=1}^n b_k \sin kx$.

On pose : $\forall x \in \mathbb{R}, \tilde{f}(x) = \frac{1}{2}(f(x^-) + f(x^+))$, avec $f(x^-) = \lim_{t \rightarrow x, t < x} f(t)$ et $f(x^+) = \lim_{t \rightarrow x, t > x} f(t)$.

L'application \tilde{f} (la "régularisée" de f) coïncide donc avec f en tout point où f est continue.

Dans cette question, x est un réel donné.

1. Soit g une application continue par morceaux de $[a, b]$ dans \mathbb{C} (avec $a < b$).

Pour tout réel strictement positif t , on pose $I_t(g) = \int_a^b g(u) \sin tu \, du$.

Montrer que $\lim_{t \rightarrow +\infty} I_t(g) = 0$.

Indication : on commencera par supposer que g est en escaliers sur $[a, b]$. [S]

2. On pose, pour tout u de $]0, \pi]$, $g(u) = \frac{1}{2 \sin \frac{u}{2}} (f(x+u) + f(x-u) - 2\tilde{f}(x))$.

Montrer que g se prolonge en une application continue par morceaux sur $[0, \pi]$. [S]

3. Montrer que pour tout u de $\mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z}$, on a l'égalité : $\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos ku = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})u}{2 \sin \frac{u}{2}}$. [S]

4. En déduire la valeur de l'intégrale $J_n = \int_0^\pi \frac{\sin(n + \frac{1}{2})u}{\sin \frac{u}{2}} \, du$. [S]

5. Montrer que $S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi \frac{\sin(n + \frac{1}{2})(x-u)}{2 \sin \frac{x-u}{2}} f(u) \, du$ [S]

6. Montrer que $S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi \frac{\sin(n + \frac{1}{2})u}{2 \sin \frac{u}{2}} f(u+x) \, du$. [S]

7. Montrer que $S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin(n + \frac{1}{2})u}{2 \sin \frac{u}{2}} (f(u+x) + f(x-u)) \, du$. [S]

8. En déduire que $S_n(x) - \tilde{f}(x) = \int_0^\pi g(u) \sin(n + \frac{1}{2})u \, du$ [S]

9. En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = \tilde{f}(x)$. Conclusion ? [S]