Équations dans $\mathcal{P}(E)$

Soit E un ensemble.

Pour toute partie A de E, on note $\bar{A}$ le complémentaire de A dans E.

1. Soit A une partie de E.

   On cherche à caractériser les solutions (X, Y) de l'équation $X \cap Y = A$.

   (a) Soit A une partie de E. Montrer que pour tout couple (R, S) de parties de E, les ensembles $\begin{cases} X = A \cup (R \cap \bar{S}) \\ Y = A \cup (\bar{R} \cap S) \end{cases}$ vérifient $X \cap Y = A$. [I] [S]

   (b) Montrer que, réciproquement, toute solution (X, Y) de $X \cap Y = A$ est de la forme ci-dessus pour, au moins, un couple (R, S) de parties de E. [I] [S]

   (c) Conclure. [I] [S]

2. Etudier de même l'équation $X \cup Y = A$.

   On donnera deux démonstrations pour cette question :

   (a) Une méthode analogue à la précédente, avec $\begin{cases} X = A \cap (R \cup \bar{S}) \\ Y = A \cap (\bar{R} \cup S) \end{cases}$ [I] [S]

   (b) Une méthode qui utilise le *résultat* de la question précédente. [I] [S]

3. Dans cette question, on désire étudier l'équation $(A \cap X) \cup (B \cap \bar{X}) = C$, où A, B, C sont des parties données de E, X étant une partie inconnue de E.

   (a) On suppose que X_0 est solution de cette équation.

      i. Montrer que $A \cap B \subset C$ et $C \subset A \cup B$. [I] [S]

      ii. Montrer que $(\bar{B} \cap C) \cup (B \cap \bar{C}) \cup \left[X_0 \cap \left((A \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B})\right)\right] = X_0$. [I] [S]

   (b) On suppose que $A \cap B \subset C \subset A \cup B$.

   D étant une partie de E, on pose : $X = (\bar{B} \cap C) \cup (B \cap \bar{C}) \cup \left[D \cap ((A \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B}))\right]$.

   Démontrer que :

      i. $A \cap X = C \cap \left[\bar{B} \cup (D \cap A \cap B)\right]$. [I] [S]

      ii. $\bar{B} \cup X = \bar{B} \cup (B \cap \bar{C}) \cup (D \cap A \cap B)$. [I] [S]

      iii. $B \cap \bar{X} = C \cap \left[\bar{A} \cup (\bar{D} \cap B)\right]$. [I] [S]

   (c) En déduire $(A \cap X) \cup (B \cap \bar{X})$. [I] [S]

   (d) Donner une condition nécessaire et suffisante, portant sur A,B,C, pour que l'équation $(A \cap X) \cup (B \cap \bar{X}) = C$ ait au moins une solution. [I] [S]

   (e) Donner alors la forme générale de la solution. [I] [S]

Indications ou résultats

1. (a) Distributivité de $\cup$ par rapport à $\cap$, puis associativité et commutativité de $\cap$. [Q]
   (b) Choisir par exemple $R = X$ et $S = Y$. [Q]
   (c) (X, Y) est solution de $X \cap Y = A \Leftrightarrow$ il existe R, S dans $\mathcal{P}(E)$ tel que… [Q]
2. (a) Utiliser encore les propriétés de $\cup, \cap$ et toujours $R = X, S = Y$ pour la réciproque. [Q]
   (b) Utiliser le passage au complémentaire, qui permet de transformer un problème de réunion en un problème d'intersection. [Q]
3. (a) i. Montrer d'abord que $(A \cap B) \cap C = A \cap B$.
   Utiliser ensuite $A \cap X_0 \subset A$ et $B \cap \bar{X}_0 \subset B$. [Q]
   ii. Montrer tout d'abord $\bar{B} \cap C = \bar{B} \cap A \cap X_0$.
   Vérifier également $B \cap \bar{C} = B \cap \bar{A} \cap X_0$. [Q]
   (b) i. Dans le développpement des deux membres de l'égalité à démontrer, on pourra remarquer que $C \cap A \cap B = A \cap B$ et $A \cap D \cap \bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset$.
   De même on pourra utiliser $A \cap B \cap \bar{C} = \emptyset$ et $C \cap \bar{B} \cap A = C \cap \bar{B}$. [Q]
   ii. $\bar{B}$ contient $\bar{B} \cap C$ et $D \cap \bar{A} \cap \bar{B}$. [Q]
   iii. B est inclus dans $B \cup \bar{C}$ et dans $\bar{D} \cup A \cup B$.
   On sera aussi amené à justifier et à utiliser $C \cap \bar{A} \cap B = C \cap \bar{A}$. [Q]
   (c) Factoriser $C \cap \cdots$, et utiliser les questions (i) et (iii). [Q]
   (d) La condition est $A \cap B \subset C \subset A \cap B$. [Q]
   (e) Simple regroupement des résultats des questions 3-a et 3-c. [Q]