Approximation d'une solution de $f''(t) = a(t)f(t) + b(t)$

On désigne par $a : [0,1] \to \mathbb{R}$ et $b : [0,1] \to \mathbb{R}$ deux applications continues.

On suppose que l'application $t \mapsto a(t)$ est à valeurs positives ou nulles.

Soient λ, μ deux réels. On considère le problème suivant :

Trouver $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable et telle que $\begin{cases} \forall\, t \in [0,1],\ f''(t) = a(t)f(t) + b(t) \\ f(0) = \lambda,\ f(1) = \mu \end{cases}$

Il s'agit donc d'une équation différentielle avec "conditions aux limites".

On suppose que ce problème admet une solution, désignée par f dans toute la suite.

On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^4$ sur $[0,1]$.

On note $M_2(f) = \sup_{[0,1]} |f''|$ et $M_4(f) = \sup_{[0,1]} \left|f^{(4)}\right|$.

L'objectif est ici d'étudier une méthode d'approximation de f sur $[0,1]$.

Les parties I et II sont indépendantes.

Première Partie

1. Soit $g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^2$, avec $\alpha < \beta$.
   On suppose que $g(\alpha) = 0$ et que $g(\beta) = 0$. On pose $M_2(g) = \sup_{[\alpha,\beta]} |g''|$.
   (a) Montrer que : $\forall\, t \in [\alpha, \beta],\ |g(t)| \leq \dfrac{(t-\alpha)(\beta - t)}{2} M_2(g)$. [S]
   (b) En déduire que : $\sup_{[\alpha,\beta]} |g| \leq \dfrac{(\beta-\alpha)^2}{8} M_2(g)$. [S]
2. On garde les notations précédentes, mais on ne suppose plus $g(\alpha) = g(\beta) = 0$.
   Prouver l'inégalité : $\sup_{[\alpha,\beta]} |g| \leq \dfrac{(\beta-\alpha)^2}{8} M_2(g) + \max(|g(\alpha)|, |g(\beta)|)$ [S]
3. On se donne n dans $\mathbb{N}$. On pose $h = \dfrac{1}{n+1}$, et $\forall\, k \in \{0, \ldots, n+1\},\ t_k = kh$.
   Pour tout k de $\{0, \ldots, n+1\}$, soit u_k une valeur approchée de $f(t_k)$.
   On note $\delta_n = \max\{|u_k - f(t_k)|, 0 \leq k \leq n+1\}$.
   δ_n représente donc l'erreur maximum commise dans les approximations $f(t_k) \approx u_k$.
   On définit une application φ_n sur $[0,1]$ de la manière suivante :
   ◇ Pour tout k de $\{0, \ldots, n+1\}$, $\varphi_n(t_k) = u_k$.
   ◇ Pour tout k de $\{0, \ldots, n\}$, φ_n est affine sur $[t_k, t_{k+1}]$.
   Montrer que $\sup_{[0,1]} |f - \varphi_n| \leq \dfrac{M_2(f)}{8(n+1)^2} + \delta_n$. [S]

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 8 pages.

Deuxième Partie

On se donne un entier $n \geq 2$, et des réels $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ et $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$.

On suppose que pour tout k de $\{1, \ldots, n\}$ on a $\alpha_k \geq 2$.

On considère le système (S) de n équations $(E_1), \ldots, (E_n)$ aux n inconnues $u_1, \ldots, u_n$:

$$(S) \quad \begin{cases} \alpha_1 u_1 & -u_2 & & & & = \beta_1 & (E_1) \\ -u_1 & +\alpha_2 u_2 & -u_3 & & & = \beta_2 & (E_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & -u_{n-2} & +\alpha_{n-1}u_{n-1} & -u_n & = \beta_{n-1} & (E_{n-1}) \\ & & & -u_{n-1} & +\alpha_n u_n & = \beta_n & (E_n) \end{cases}$$

1. Montrer qu'on définit n réels $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ de $]0, 1]$ en posant :

$$\gamma_1 = \frac{1}{\alpha_1} \qquad \text{et} \qquad \forall\, k \in \{1, \ldots, n-1\},\ \gamma_{k+1} = \frac{1}{\alpha_{k+1} - \gamma_k}$$

[S]

2. Soient $v_1, v_2, \ldots, v_n$ les n réels définis par les égalités :

$$v_1 = \beta_1\, \gamma_1 \qquad \text{et} \qquad \forall\, k \in \{1, \ldots, n-1\},\ v_{k+1} = (\beta_{k+1} + v_k)\gamma_{k+1}$$

Montrer que (S) a une solution unique $(u_1, \ldots, u_n)$, et qu'elle est donnée par les relations :

$$(\Sigma) : \qquad u_n = v_n \qquad \text{et} \qquad \forall\, k \in \{1, \ldots, n-1\},\ u_k = v_k + \gamma_k\, u_{k+1}$$

[S]

3. Montrer qu'on a la majoration $\sup_{1 \leq k \leq n} |u_k| \leq \dfrac{(n+1)^2}{2} \sup_{1 \leq k \leq n} |\beta_k|$ [S]

Troisième Partie

1. Soit t un élément de $]0, 1[$. Soit h dans $\mathbb{R}^{+*}$ tel que $[t-h, t+h] \subset [0, 1]$.

Montrer que $|f(t+h) + f(t-h) - 2f(t) - h^2 f''(t)| \leq \dfrac{h^4}{12} M_4(f)$. [S]

2. On reprend maintenant les notations de la question I-3. On rappelle que $h = \dfrac{1}{n+1}$.

Déduire de ce qui précède que pour tout k de $\{1, \ldots, n\}$ il existe un réel ε_k tel que :

$-f(t_{k-1}) + (2 + h^2 a(t_k))f(t_k) - f(t_{k+1}) = -h^2 b(t_k) + \varepsilon_k$, avec $|\varepsilon_k| \leq \dfrac{h^4}{12} M_4(f)$. [S]

3. On connait déjà les valeurs $f(t_0) = f(0) = \lambda$ et $f(t_{n+1}) = f(1) = \mu$.

On veut maintenant des valeurs approchées u_1 de $f(t_1)$, u_2 de $f(t_2)$, ..., u_n de $f(t_n)$.

Pour cela, on résout le système suivant, "proche" de celui vérifié par les $f(t_k)$:

$$\begin{cases} u_0 = \lambda, \quad u_{n+1} = \mu \\ \forall\, k \in \{1, \ldots, n\}, -u_{k-1} + (2 + h^2 a(t_k))u_k - u_{k+1} = -h^2 b(t_k) \end{cases}$$

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 8 pages.

(a) Indiquer comment calculer successivement $u_n, u_{n-1}, \dots, u_1$. [S]

(b) Préciser le système vérifié par les réels $w_1 = f(t_1) - u_1, \dots, w_n = f(t_n) - u_n$.

En déduire que $\sup_{1\leq k\leq n} |f(t_k) - u_k| \leq \dfrac{M_4(f)}{24(n+1)^2}$. [S]

4. φ_n ayant le sens vu en I-3, trouver K tel que : $\sup_{[0,1]} |f - \varphi_n| \leq \dfrac{K}{(n+1)^2}$. Conclusion ? [S]

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 8 pages.