Dérivées successives de $\exp(-\frac{1}{x})$

Le problème est constitué de deux parties indépendantes.

On définit une fonction f par : $f(x) = \exp\left(-\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

PREMIÈRE PARTIE

1. Etudier les variations de f et construire son graphe Γ dans un repère orthonormé.
   On précisera le point d'inflexion I et la demi-tangente au point d'arrêt. [S]
2. (a) Déterminer le point A de Γ, distinct de O, en lequel la tangente à Γ passe par O. [S]
   (b) Montrer qu'il existe deux points de Γ, distincts de A, et deux seulement, en lesquels la tangente à Γ est parallèle à OA. On notera α et β $(\alpha < \beta)$ les abscisses de ces points (qu'on ne demande pas de calculer). [S]
3. On définit une fonction g sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{1}{1 - 2\ln|x|}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$.
   (a) Etudier les variations et tracer le graphe $\mathcal{C}$ de g dans un repère orthonormé (unité 2cm). On précisera la concavité de $\mathcal{C}$. [S]
   (b) Montrer que $g(x) = x \Leftrightarrow x \in \{\alpha, \beta, 0, 1\}$. [S]
   (c) Etudier $g(x) - x$ sur $[0, 1]$.
   En déduire : $\forall\, x \in]0, \beta[$, $x < g(x) < \beta$, et $\forall\, x \in]\beta, 1[$, $\beta < g(x) < x$. [S]
   (d) On définit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ par $0 < u_0 < 1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = g(u_n)$.
   Montrer qu'elle converge vers β. [S]
   (e) Calculer β à 10^{-2} près, avec successivement $u_0 = 0,2$ et $u_0 = 0,4$ (on fera figurer les résultats intermédiaires). [S]
   (f) Montrer que $-2,10 < \alpha < -2,09$. [S]

DEUXIÈME PARTIE

1. Montrer qu'il existe une suite (P_n) de polynômes telle que :
   $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f^{(n)}(x) = P_n(x)x^{-2n}\exp\left(-\frac{1}{x}\right)$,
   la suite (P_n) vérifiant la relation de récurrence :
   $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $P_{n+1}(x) = x^2 P_n'(x) - (2nx - 1)P_n(x)$. [S]
2. Expliciter P_1 et P_2. [S]
3. Déterminer le terme de plus haut degré de P_n, ainsi que son terme constant. [S]
4. Dans cette question on trouve une relation de récurrence entre les P_n.
   (a) Montrer que $\forall\, x \in \mathbb{R}^*$, $x^2 f'(x) = f(x)$. [S]
   (b) En appliquant la formule de Leibniz à cette relation, prouver que :
   $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $P_{n+1}(x) + (2nx - 1)P_n(x) + n(n-1)x^2 P_{n-1}(x) = 0$. [S]

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 11 pages.

5. Déduire de ce qui précède que :
   (a) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, P_n'(x) = -n(n-1)P_{n-1}(x)$. [S]
   (b) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, n(n-1)P_n(x) + (1-(2n-2)x)P_n'(x) + x^2 P_n''(x) = 0$. [S]

6. Soit n un entier donné, supérieur ou égal à 1. On pose $P_n(x) = \sum_{m=0}^{n-1} a_m x^m$.
   (a) Montrer que $\forall k \in \{0, \dots, n-1\}, a_k = \frac{1}{k!} P_n^{(k)}(0)$. [S]
   (b) Etablir que $\forall k \in \{0, \dots, n-1\}, P_n^{(k)}(x) = (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!} \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!} P_{n-k}(x)$. [S]
   (c) En déduire la valeur des coefficients a_k. [S]

 ©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 11 pages.

Corrigé du problème

PREMIÈRE PARTIE

1. – Degré de dérivabilité de f

   f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ (car composée d'applications de classe $\mathcal{C}^\infty$: l'application $x \to \frac{1}{x}$ de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ et l'application $x \to \exp(-x)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.)

   – Limites aux bornes

   On a $\lim\limits_{0+} f = 0$ car $\lim\limits_{-\infty} \mathrm{e}^X = 0$: f est donc continue à droite à l'origine.

   On a $\lim\limits_{0-} f = +\infty$ car $\lim\limits_{+\infty} \mathrm{e}^X = +\infty$: la droite $x = 0$ est asymptote verticale.

   $\lim\limits_{+\infty} f = 1^-$ et $\lim\limits_{-\infty} f = 1^+$: la droite $y = 1$ est asymptote horizontale (la courbe est au-dessus au voisinage de $-\infty$, et en dessous au voisinage de $+\infty$.)

   – Sens de variation

   Pour tout x de $\mathbb{R}^*$, $f'(x) = \frac{1}{x^2}\exp\left(-\frac{1}{x}\right) > 0$.

   f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}^{-*}$ et sur $\mathbb{R}^+$ (la continuité en 0 à droite permet d'ajouter l'origine à l'intervalle $]0, +\infty[$.)

   – Dérivabilité à droite en 0

   On a $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0+} \frac{1}{x}\exp\left(-\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{X\to+\infty} X\exp(-X) = 0^+$.

   Cela prouve que f est dérivable en 0 à droite, avec $f'(0) = 0$.

   La courbe représentative de f présente donc à l'origine une demi-tangente horizontale (et la courbe est au-dessus car, pour tout x de $\mathbb{R}^{+*}$, $f(x) > 0$.)

   – Concavité et point d'inflexion

   Pour tout x de $\mathbb{R}^*$, $f''(x) = f(x)\left(-\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4}\right) = \frac{1-2x}{x^4}f(x)$.

   f'' s'annule en changeant de signe pour $x = 1/2$.

   Le point $I = (2, f(1/2) = \frac{1}{\mathrm{e}^2} \approx 0.135)$ est donc un point d'inflexion de Γ.

   Si $x < 0$ ou si $0 < x < 1/2$, $f''(x) > 0$: f est donc convexe sur $\mathbb{R}^{-*}$ et sur $[0, 1/2]$ (les points 0 et $1/2$ sont ajoutés par continuité.)

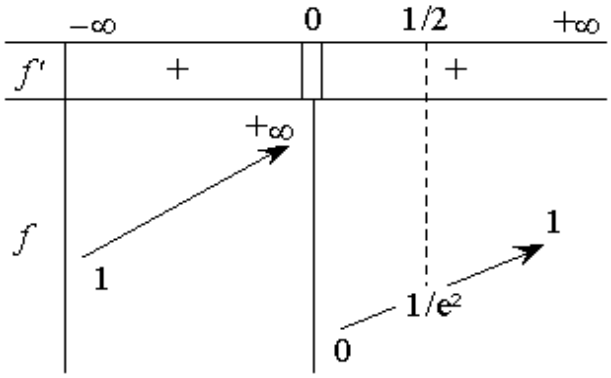
   Si $x > 1/2$, $f''(x) < 0$: f est donc concave sur $[1/2, +\infty[$.

   La tangente au point d'inflexion a pour coefficient directeur $f'(1/2) = \frac{4}{\mathrm{e}^2} \approx 0.54$.

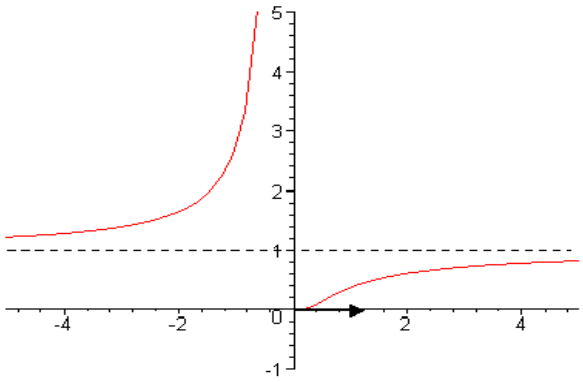
 ©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 11 pages.

– Tableau de variations



– Courbe représentative



[Q]

2. (a) L'équation de la tangente au point d'abscisse $x_0 \neq 0$ de Γ est :
$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ c'est-à-dire $y = \exp\left(-\frac{1}{x_0}\right)\left[\frac{1}{x_0^2}(x - x_0) + 1\right]$.
Cette tangente passe par l'origine si cette équation est vérifiée pour $x = y = 0$.
Le point x_0 doit donc vérifier $-\frac{1}{x_0} + 1 = 0$ c'est-à-dire $x_0 = 1$.
$A(1, \frac{1}{\mathrm{e}})$ est donc le seul point de Γ distinct de O, où la tangente passe par O. [Q]

(b) Le coefficient directeur de la droite OA est $\frac{1}{\mathrm{e}}$.
La tangente en un point $(x, f(x))$ de Γ est parallèle à $OA \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{\mathrm{e}}$.
Mais $f'(x) = \frac{1}{\mathrm{e}} \Leftrightarrow \frac{1}{x^2}\exp\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\mathrm{e}}$.
On va étudier la fonction f', dont la dérivée sur $\mathbb{R}^*$ est $f''(x) = \frac{1-2x}{x^4}\exp\left(-\frac{1}{x}\right)$.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 11 pages.