Quatre études de fonctions

Exercice 1

On définit la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{1/x}\sqrt{|x(x+2)|}$.

1. Préciser le domaine de définition, de continuité, de dérivabilité de f. [S]
2. Indiquer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
   Préciser l'allure de la courbe $y = f(x)$ au voisinage de $x = -2$ et au voisinage de $x = 0$. [S]
3. Étudier le sens de variations de f, et dresser son tableau de variations. [S]
4. Étudier l'existence d'une asymptote oblique quand $x \to -\infty$ ou quand $x \to +\infty$.
   Donner le placement de la courbe par rapport à cette asymptote. [S]
5. Étudier la concavité de f et préciser les points d'inflexion. [S]
6. Tracer soigneusement la courbe représentative de f. [S]

Exercice 2

On considère l'application f définie par $f(x) = |\tan x|^{\cos x}$.

1. Indiquer le domaine de définition de f. Que dire de la dérivabilité de f sur ce domaine ?
   Montrer qu'on peut réduire l'étude de f à l'intervalle $]0, \pi[$.
   Pour tout x de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, comparer $f(\pi - x)$ et $f(x)$. Que peut-on en déduire ? [S]
2. Montrer que l'application f peut être prolongée par continuité en $x = 0$ et en $x = \frac{\pi}{2}$. [S]
3. Étudier le sens de variations de f sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, et dresser son tableau de variations.
   On donnera une valeur approchée de l'abscisse x_0 pour laquelle $f'(x_0) = 0$.
   Procéder à une étude analogue sur $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ [S]
4. Préciser l'allure de la courbe $y = f(x)$ au voisinage de $x = 0$ et de $x = \frac{\pi}{2}$. [S]
5. Tracer soigneusement la courbe représentative de f sur un intervalle contenant $[0, \pi]$. [S]

Exercice 3

On considère l'application f définie par $f(x) = x^{\frac{x^2}{x^2-1}}$.

1. Indiquer le domaine de définition de f. Que dire de la dérivabilité de f sur ce domaine ?
   Préciser les limites de f aux bornes de son domaine de définition. [S]
2. Étudier le sens de variations de f et dresser son tableau de variations. [S]
3. Indiquer l'allure de la courbe $y = f(x)$ au voisinage de $x = 0$, de $x = 1$, et de $+\infty$. [S]
4. Tracer soigneusement la courbe représentative de f. [S]

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 13 pages.

Exercice 4

1. Montrer que pour tout $x > -1$ (et $x \neq 0$) : $\exists ! \theta_x \in]0,1[$ tel que $\ln(1+x) = \dfrac{x}{1+\theta_x x}$. [S]
2. On définit l'application f par $f(x) = \theta_x$.

   Préciser la dérivabilité de f, et donner les limites de f aux bornes de son domaine. [S]
3. Étudier le sens de variations de f et dresser son tableau de variations. [S]
4. Indiquer l'allure de la courbe $y = f(x)$ au voisinage de $x = 0$ et de $x = -1$. [S]
5. Tracer soigneusement la courbe représentative de f. [S]

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 13 pages.

Corrigé du problème

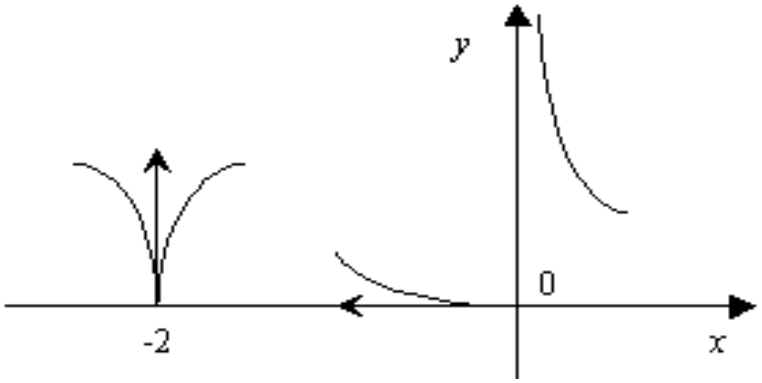
Exercice 1

1. f est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$, comme produit et composée d'applications continues.
   Elle est dérivable (et même de classe $\mathcal{C}^\infty$) sur $]-\infty,-2[\cup]-2,0[\cup]0,+\infty[$. [Q]
2. – Au voisinage de $\pm\infty$, on a $f(x)\sim|x|$ donc $\lim\limits_{\infty} f=+\infty$.
   – L'application f est continue en -2, avec $f(-2)=0$.
   – Au voisinage de 0, on a $f(x)\sim\sqrt{2}\sqrt{|x|}\,\mathrm{e}^{1/x}$.
   ◇ A droite de 0 on a donc $\lim\limits_{0+} f=\lim\limits_{+\infty}\sqrt{2}\dfrac{\mathrm{e}^X}{\sqrt{X}}=+\infty$.
   Ainsi la droite $x=0$ est asymptote verticale.
   ◇ A gauche de 0 on a $\lim\limits_{0-} f=0$.
   On peut donc prolonger f par continuité en 0 à gauche en posant $f(0)=0$.
   – On va préciser l'allure de la courbe au voisinage de -2.
   Posons $x=-2+h$. Alors $f(x)=\exp(\frac{1}{-2+h})\sqrt{|h(-2+h)|}\sim\sqrt{\frac{2}{\mathrm{e}}}\sqrt{|h|}$.
   On en déduit $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(-2+h)-f(-2)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\sqrt{\frac{2}{\mathrm{e}}}\dfrac{\sqrt{|h|}}{h}=\begin{cases}+\infty & \text{si } h\to0^+\\ -\infty & \text{si } h\to0^-\end{cases}$
   L'application f n'est donc pas dérivable en -2. Plus précisément, la courbe $y=f(x)$ admet au point $(-2,0)$ une demi-tangente verticale dirigée vers les $y>0$.
   – On va préciser l'allure de la courbe au voisinage de 0 (après le prolongement $f(0)=0$.)
   On sait déja que $\lim\limits_{0+} f=+\infty$ (asymptote verticale $x=0$ à droite de 0.)
   Quand $x\to0^-$, $f(x)\sim\sqrt{2}\,\sqrt{|x|}\,\mathrm{e}^{1/x}$ donc $\dfrac{f(x)}{x}\sim-\sqrt{2}\,\dfrac{1}{\sqrt{|x|}}\,\mathrm{e}^{1/x}$.
   On en déduit $\lim\limits_{0^-}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{-\infty}-\sqrt{2}\,\sqrt{|X|}\,\mathrm{e}^X=0^-$.
   Il en découle que la courbe $y=f(x)$ présente à l'origine une demi-tangente horizontale (la courbe étant située au-dessus car $f\geq0$ sur son domaine.)

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 13 pages.

En résumé, voici l'allure de la courbe $y = f(x)$ au voisinage de $x = 0$ et de $x = -2$:



[Q]

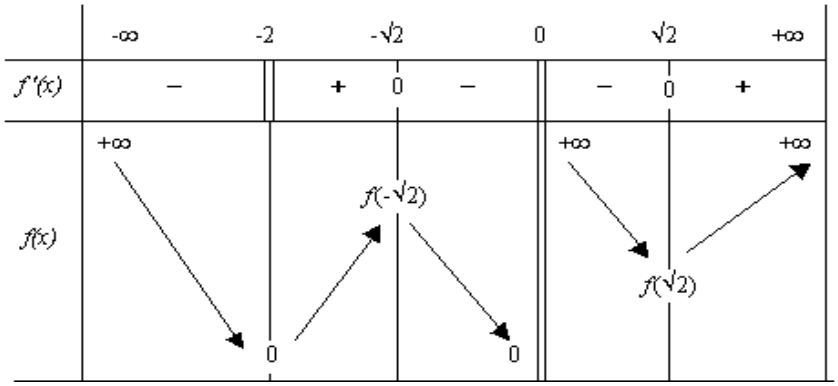
3. On remarque que pour tout x de $\mathbb{R}-\{-2,0\}$ on a $f(x) > 0$ et $\ln f(x) = \frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln|x(x+2)|$.

   On dérive et on trouve : $\forall\, x \in \mathbb{R}-\{-2,0\},\ \frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2}\frac{2(x+1)}{x(x+2)} = \frac{-(x+2)+x(x+1)}{x^2(x+2)}$.

   On en déduit : $\forall\, x \in \mathbb{R}-\{-2,0\},\ f'(x) = \frac{x^2-2}{x^2(x+2)}f(x)$.

   L'application f' est donc du signe de $\frac{x^2-2}{x+2}$ donc du signe de $(x+2)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$.

   On en déduit le tableau de variations de f :



   On remarque les points $(-\sqrt{2}, f(-\sqrt{2}))$ et $(\sqrt{2}, f(\sqrt{2}))$ en lesquels la courbe $y = f(x)$ présente une tangente horizontale. On a $f(\sqrt{2}) \approx 4,46$ et $f(-\sqrt{2}) \approx 0,45$. [Q]

4. On effectue un développement généralisé par rapport à l'infiniment petit $\frac{1}{x}$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathrm{e}^{1/x}\sqrt{|x(x+2)|} = |x|\ \mathrm{e}^{1/x}\sqrt{1+\frac{2}{x}} \qquad (\text{quand } x \to \infty,\ 1+\frac{2}{x} > 0) \\ &= |x|\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\mathrm{o}(\frac{1}{x^2})\right)\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\mathrm{o}(\frac{1}{x^2})\right) \\ &= |x|\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}+\mathrm{o}(\frac{1}{x^2})\right) \end{aligned}$$

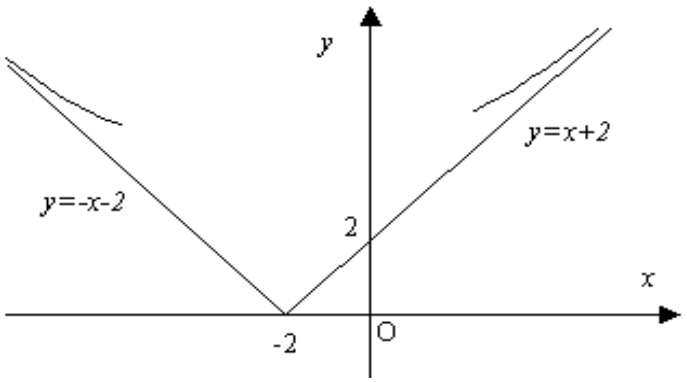
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 13 pages.

◇ On en déduit que quand $x \to +\infty$ alors $f(x) = x + 2 + \frac{1}{x} + o(\frac{1}{x})$.
La courbe présente donc l'asymptote $y = x + 2$ (la courbe est localement au-dessus.)

◇ De même, quand $x \to -\infty$ alors $f(x) = -x - 2 - \frac{1}{x} + o(\frac{1}{x})$.
La courbe présente donc l'asymptote $y = -x - 2$ (la courbe est localement au-dessus.)

En résumé, voici l'allure de la courbe au voisinage de $\pm\infty$.



[Q]

5. On sait que pour tout x de $\mathbb{R} - \{-2, 0\}$, on a : $f'(x) = \dfrac{x^2-2}{x^2(x+2)} f(x)$.

On en déduit pour tout x de $\mathbb{R} - \{-2, 0\}$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \Big(\frac{x^2-2}{x^2(x+2)}\Big)' f(x) + \frac{x^2-2}{x^2(x+2)} f'(x) \\ &= \frac{2x^3(x+2) - (x^2-2)(3x^2+4x) + (x^2-2)^2}{x^4(x+2)^2} f(x) \\ &= \frac{2(x^2+4x+2)}{x^4(x+2)^2} f(x) \end{aligned}$$

L'application f étant > 0 sur $\mathbb{R} - \{0, -2\}$, $f''(x)$ a le signe de $x^2 + 4x + 2$.
Mais $(x^2 + 4x + 2) = (x - \alpha)(x - \beta)$ avec $\alpha = -2 - \sqrt{2}$ et $\beta = -2 + \sqrt{2}$.
On en déduit le signe de f'' et la concavité de f.

	$-\infty$		$-2-\sqrt{2}$		-2		$-2+\sqrt{2}$		0		$+\infty$
f''		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
f		convexe		concave		concave		convexe		convexe	

Il y a deux points d'inflexion : $\begin{cases} I_1 = (\alpha, f(\alpha)) \approx (-3.41, 1.64) \\ I_2 = (\beta, f(\beta)) \approx (-0.59, 0.17) \end{cases}$ [Q]

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 13 pages.