Trois relations identiques dans $\mathcal{P}(E)$

Etant donné un ensemble E, on désigne par $\mathcal{M}$ une partie non vide de $\mathcal{P}(E)$ telle que :

$$\forall\, X, Y \in \mathcal{M},\ \exists\, Z \in \mathcal{M},\ \text{ tel que }\ Z \subset X \cap Y.$$

1. Montrer que pour tout ensemble E, il existe de telles parties $\mathcal{M}$ de $\mathcal{P}(E)$. [S]
2. On associe à $\mathcal{M}$ une relation binaire $\mathcal{R}$ définie sur $\mathcal{P}(E)$ par :

$$\forall\, A, B \in \mathcal{P}(E), \quad A\,\mathcal{R}\,B \Leftrightarrow \exists\, X \in \mathcal{M} \text{ telque } A \cap X = B \cap X$$

   (a) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. [S]
   (b) Montrer que $\mathcal{R}$ est l'égalité si et seulement si $\mathcal{M} = \{E\}$. [S]
   (c) Montrer que $\mathcal{R}$ est l'équivalence universelle si et seulement si $\emptyset \in \mathcal{M}$. [S]
3. On note $\widehat{A}$ la classe d'équivalence, pour $\mathcal{R}$, d'une partie A quelconque de E.
   (a) Déterminer $\widehat{E}$ et $\widehat{\emptyset}$. [S]
   (b) Montrer que si $A \in \widehat{E}$ et $B \in \widehat{E}$, alors $A \cap B \in \widehat{E}$. [S]
   (c) On pose $\mathcal{N} = \widehat{E}$, et dans $\mathcal{P}(E)$ on désigne par $\mathcal{S}$ la relation :

$$\forall\, A, B \in \mathcal{P}(E), \quad A\,\mathcal{S}\,B \Leftrightarrow \exists\, Y \in \mathcal{N} \text{ telque } A \cap Y = B \cap Y$$

   Montrer que les relations $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont identiques. [S]
4. On définit sur $\mathcal{P}(E)$ la différence symétrique :

$$\forall\, A, B \in \mathcal{P}(E),\ A \Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$$

   Soit $\mathcal{T}$ la relation définie sur $\mathcal{P}(E)$ par :

$$\forall\, A, B \in \mathcal{P}(E), \quad A\,\mathcal{T}\,B \Leftrightarrow \exists\, X \in \mathcal{M} \text{ telque } (A \Delta B) \cap X = \emptyset$$

   (a) Montrer que les relations $\mathcal{T}$ et $\mathcal{R}$ sont identiques. [S]
   (b) A, A', B, B' étant des parties de E telles que $A\,\mathcal{R}\,A'$ et $B\,\mathcal{R}\,B'$, montrer que :
   $(A \cap B)\,\mathcal{R}\,(A' \cap B')$, $\quad (A \cup B)\,\mathcal{R}\,(A' \cup B')$, $\quad \bar{A}\,\mathcal{R}\,\overline{A'}$, $\quad$ et $(A \Delta B)\,\mathcal{R}\,(A' \Delta B')$. [S]
5. Déterminer les classes d'équivalence de $\mathcal{P}(E)$ pour la relation $\mathcal{R}$ dans les cas suivants :
   (a) $\mathcal{M} = \{E\}$. [S]
   (b) $\emptyset \in \mathcal{M}$. [S]
   (c) $\mathcal{M} = \{\{x\}\}$, où $x \in E$. [S]
   (d) $\mathcal{M} \supset \{\{x\}, \{y\}\}$, où x, y sont deux éléments distincts de E. [S]

Corrigé du problème

1. $\mathcal{M} = \mathcal{P}(E)$ convient. [Q]
2. (a) – *Réflexivité*

   Soit A dans $\mathcal{P}(E)$. Puisque $\mathcal{M} \neq \emptyset$, soit X un élément de M.

   On a... $A \cap X = A \cap X$, ce qui prouve $A \mathcal{R} A$.

   – *Symétrie*

   Elle est évidente par définition (car X, Y jouent le même rôle.)

   – *Transitivité*

   Soient A, B, C dans $\mathcal{P}(E)$, tels que : $A \mathcal{R} B$ et $B \mathcal{R} C$.

   Il existe X et Y dans $\mathcal{M}$ tels que $A \cap X = B \cap X$ et $B \cap Y = C \cap Y$.

   On sait qu'il existe Z dans $\mathcal{M}$ tel que $Z \subset X \cap Y$.

   On en déduit $\begin{cases} A \cap X \cap Z = B \cap X \cap Z \\ B \cap Y \cap Z = C \cap Y \cap Z \end{cases}$

   puis $\begin{cases} A \cap Z = B \cap Z \\ B \cap Z = C \cap Z \end{cases}$ car $X \cap Z = Z$ et $Y \cap Z = Z$.

   Ainsi $A \cap Z = C \cap Z$, et Z est élément de $\mathcal{M}$. Donc $A \mathcal{R} C$.

   – *Conclusion*

   $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{P}(E)$.

   [Q]

   (b) – *Supposons $\mathcal{M} = \{E\}$*

   Pour tous A et B de $\mathcal{P}(E)$, $A \mathcal{R} B \Leftrightarrow A \cap E = B \cap E \Leftrightarrow A = B$.

   La relation $\mathcal{R}$ est donc l'égalité.

   – *Réciproquement*

   On suppose que $\mathcal{M}$ est différent de $\{E\}$. Montrons que $\mathcal{R}$ n'est pas l'égalité.

   Puisque $\mathcal{M} \neq \emptyset$, il existe X dans $\mathcal{M}$, avec $X \neq E$.

   On constate que $X \mathcal{R} E$ (car $X \cap X = E \cap X$ et $X \in \mathcal{M}$.)

   Or X et E sont distincts : $\mathcal{R}$ n'est pas donc pas la relation égalité.

   – *Conclusion*

   $\mathcal{R}$ est la relation "égalité" $\Leftrightarrow$ $\mathcal{M}$ se réduit au singleton$\{E\}$.

   [Q]

   (c) – *Supposons $\emptyset \in \mathcal{M}$*

   Pour tous A, B de $\mathcal{P}(E)$ on a alors $A \mathcal{R} B$ car $A \cap \emptyset = B \cap \emptyset$.

   $\mathcal{R}$ est donc l'équivalence universelle.