

## Trois relations identiques dans $\mathcal{P}(E)$

Etant donné un ensemble  $E$ , on désigne par  $\mathcal{M}$  une partie non vide de  $\mathcal{P}(E)$  telle que :

$$\forall X, Y \in \mathcal{M}, \exists Z \in \mathcal{M}, \text{ tel que } Z \subset X \cap Y.$$

1. Montrer que pour tout ensemble  $E$ , il existe de telles parties  $\mathcal{M}$  de  $\mathcal{P}(E)$ . [S]
2. On associe à  $\mathcal{M}$  une relation binaire  $\mathcal{R}$  définie sur  $\mathcal{P}(E)$  par :

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(E), \quad A \mathcal{R} B \Leftrightarrow \exists X \in \mathcal{M} \text{ telque } A \cap X = B \cap X$$

- (a) Montrer que  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence. [S]
  - (b) Montrer que  $\mathcal{R}$  est l'égalité si et seulement si  $\mathcal{M} = \{E\}$ . [S]
  - (c) Montrer que  $\mathcal{R}$  est l'équivalence universelle si et seulement si  $\emptyset \in \mathcal{M}$ . [S]
3. On note  $\widehat{A}$  la classe d'équivalence, pour  $\mathcal{R}$ , d'une partie  $A$  quelconque de  $E$ .
    - (a) Déterminer  $\widehat{E}$  et  $\widehat{\emptyset}$ . [S]
    - (b) Montrer que si  $A \in \widehat{E}$  et  $B \in \widehat{E}$ , alors  $A \cap B \in \widehat{E}$ . [S]
    - (c) On pose  $\mathcal{N} = \widehat{E}$ , et dans  $\mathcal{P}(E)$  on désigne par  $\mathcal{S}$  la relation :

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(E), \quad A \mathcal{S} B \Leftrightarrow \exists Y \in \mathcal{N} \text{ telque } A \cap Y = B \cap Y$$

Montrer que les relations  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{S}$  sont identiques. [S]

4. On définit sur  $\mathcal{P}(E)$  la différence symétrique :

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(E), \quad A \Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$$

Soit  $\mathcal{T}$  la relation définie sur  $\mathcal{P}(E)$  par :

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(E), \quad A \mathcal{T} B \Leftrightarrow \exists X \in \mathcal{M} \text{ telque } (A \Delta B) \cap X = \emptyset$$

- (a) Montrer que les relations  $\mathcal{T}$  et  $\mathcal{R}$  sont identiques. [S]
  - (b)  $A, A', B, B'$  étant des parties de  $E$  telles que  $A \mathcal{R} A'$  et  $B \mathcal{R} B'$ , montrer que :
 
$$(A \cap B) \mathcal{R} (A' \cap B'), \quad (A \cup B) \mathcal{R} (A' \cup B'), \quad \overline{A} \mathcal{R} \overline{A'}, \quad \text{et } (A \Delta B) \mathcal{R} (A' \Delta B').$$
 [S]
5. Déterminer les classes d'équivalence de  $\mathcal{P}(E)$  pour la relation  $\mathcal{R}$  dans les cas suivants :
    - (a)  $\mathcal{M} = \{E\}$ . [S]
    - (b)  $\emptyset \in \mathcal{M}$ . [S]
    - (c)  $\mathcal{M} = \{\{x\}\}$ , où  $x \in E$ . [S]
    - (d)  $\mathcal{M} \supset \{\{x\}, \{y\}\}$ , où  $x, y$  sont deux éléments distincts de  $E$ . [S]

## Corrigé du problème

1.  $\mathcal{M} = \mathcal{P}(E)$  convient. [Q]

2. (a) – *Réflexivité*

Soit  $A$  dans  $\mathcal{P}(E)$ . Puisque  $\mathcal{M} \neq \emptyset$ , soit  $X$  un élément de  $\mathcal{M}$ .

On a...  $A \cap X = A \cap X$ , ce qui prouve  $A \mathcal{R} A$ .

– *Symétrie*

Elle est évidente par définition (car  $X, Y$  jouent le même rôle.)

– *Transitivité*

Soient  $A, B, C$  dans  $\mathcal{P}(E)$ , tels que :  $A \mathcal{R} B$  et  $B \mathcal{R} C$ .

Il existe  $X$  et  $Y$  dans  $\mathcal{M}$  tels que  $A \cap X = B \cap X$  et  $B \cap Y = C \cap Y$ .

On sait qu'il existe  $Z$  dans  $\mathcal{M}$  tel que  $Z \subset X \cap Y$ .

On en déduit 
$$\begin{cases} A \cap X \cap Z = B \cap X \cap Z \\ B \cap Y \cap Z = C \cap Y \cap Z \end{cases}$$

puis 
$$\begin{cases} A \cap Z = B \cap Z \\ B \cap Z = C \cap Z \end{cases} \quad \text{car } X \cap Z = Z \text{ et } Y \cap Z = Z.$$

Ainsi  $A \cap Z = C \cap Z$ , et  $Z$  est élément de  $\mathcal{M}$ . Donc  $A \mathcal{R} C$ .

– *Conclusion*

$\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence sur  $\mathcal{P}(E)$ .

[Q]

(b) – *Supposons  $\mathcal{M} = \{E\}$*

Pour tous  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{P}(E)$ ,  $A \mathcal{R} B \Leftrightarrow A \cap E = B \cap E \Leftrightarrow A = B$ .

La relation  $\mathcal{R}$  est donc l'égalité.

– *Réciproquement*

On suppose que  $\mathcal{M}$  est différent de  $\{E\}$ . Montrons que  $\mathcal{R}$  n'est pas l'égalité.

Puisque  $\mathcal{M} \neq \emptyset$ , il existe  $X$  dans  $\mathcal{M}$ , avec  $X \neq E$ .

On constate que  $X \mathcal{R} E$  (car  $X \cap X = E \cap X$  et  $X \in \mathcal{M}$ .)

Or  $X$  et  $E$  sont distincts :  $\mathcal{R}$  n'est pas donc pas la relation égalité.

– *Conclusion*

$\mathcal{R}$  est la relation "égalité"  $\Leftrightarrow \mathcal{M}$  se réduit au singleton  $\{E\}$ .

[Q]

(c) – *Supposons  $\emptyset \in \mathcal{M}$*

Pour tous  $A, B$  de  $\mathcal{P}(E)$  on a alors  $A \mathcal{R} B$  car  $A \cap \emptyset = B \cap \emptyset$ .

$\mathcal{R}$  est donc l'équivalence universelle.